- 演習の定期試験とレポートによって S2 の数学基礎理論演習の成績が決まります．
- 微積と線型合わせて 1 つの成績がつきます．
- 授業の成績は S2 の演習の成績には寄与しない予定です．
- 毎回出席をとりますが，S1 同様「50 可」の判定に使う程度で，成績にはほぼ関係しません．
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017s2.html` にあります（メッセージフォームにリンクを張っています．匿名で要望等あれば，お気軽にどうぞ）．
- 問題を解く順序はありません．授業の深めることが目的なので，自分にあった問題に取り組んでください．友達と議論したり，web を調べるのもご自由に．
- 今日は前半で行列の**対角化**の練習をし，後半ではリクエストがあった**選択公理**の話をします．
- 7/4 は休講です．7/18 に補講をします．7/25 をどうするかは考え中です．

1 復習：（行）階段行列

掃出し法（Gaussian elimination）とは，3 つの**行基本変形**：

- ある行に，0 でない数をかける
- ある行にある数（0 でもよい）をかけて，他の行に加える
- 2 つの行を入れ替える

によって，与えられた行列を**階段行列**（echelon matrix）：

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1} & \cdots & & & & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & \cdots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{r,j_r} & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

に変形することである（ここで $j_1 < j_2 < \cdots < \cdots < j_r$ かつ $a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{r,j_r} \neq 0$）．ここで非ゼロな数 $a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \cdots, a_{r,j_r}$ は **pivot**（枢軸）と呼ばれる．

すなわち，階段行列 A とは次の様なものである：ある r が存在して（実は $r = \mathrm{rank}(A)$ である）

1. $(r+1)$ 行目から最終行までは，すべて 0
2. 1 行目から r 行目の各行には，pivot が 1 つずつ存在して
    - pivot は「だんだん右に」分布する
    - どの pivot も「その左と下」の数（ないかもしれない）は 0 になっている

例えば $\begin{pmatrix} \circ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \circ 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は階段行列である（$r = 2$ で，pivot には○をつけた）．

2　復習：連立方程式の解法

掃出し法によって，**連立一次方程式**を解くことができる（**注：証明は授業でそのうちやると思います**）．そのあらすじは以下のとおりである：

1. 連立方程式は，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形に変形できる（ここで A は $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{x}$ は n 次元ベクトル，$\boldsymbol{b}$ は m 次元ベクトル）．この A を**係数行列**，$m \times (n+1)$ 行列 $(A, \boldsymbol{b})$ を**拡大係数行列**と呼ぶ．
2. 拡大係数行列に掃出し法を適用し，階段行列 $(B, \boldsymbol{c})$ を得たとする（ここで B は $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{c}$ は m 次元ベクトル）と，与えられた連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ と同値になる．
3. $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ は，B が階段行列なので逆向きに解くことができる（**後退代入**）．
4. できない場合，解は存在しない．ちなみに解が存在する必要十分条件は $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, \boldsymbol{b})$ で，解が存在する場合の解の自由度（パラメータの数）は $n - \operatorname{rank} A$ である．

3　掃出し法の練習

(X1) 以下の行列が階段行列であることを，pivot に○をつけることで確認せよ． $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(X2) 次の行列を，掃出し法によって階段行列に変形せよ． $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(X3) 係数行列が階段行列になっている $\begin{cases} 3x - 5y + 3z + w = 0 \\ \qquad -y - z + 2w = 0 \\ \qquad\quad -7z + 7w = 0. \end{cases}$ を後退代入によって解け．

(X4) 以下の連立方程式を，掃出し法によって解け． $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$

(X5) 以下が解を持つような k の値を定め，解を求めよ． $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x + 7y - 4z = 3 \\ 3x + 7y - 6z = k. \end{cases}$

4　行列の対角化

$n \times n$ 行列 A が**対角化可能**であるとは，ある可逆 $n \times n$ 行列 P が存在して，$D := P^{-1}AP$ が対角化行列になることをいう．対角化は可能だったりそうでなかったりする．以下がその判定方法と，対角化可能な場合の P と D の計算手順である（**注：証明は授業でそのうちやると思います**）：

1. A の固有値 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ を列挙する．これは固有多項式 $\det(tE_n - A) = 0$ という方程式を解くことで達せられる．
2. 固有値 α_i の線型独立な固有ベクトル $\boldsymbol{p}_{i,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{i,d_i}$ を計算する（$i = 1, 2, \cdots, s$）．これは $(A - \alpha_i E_n)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ という連立方程式を解くことで達せられる．
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} d_i = n$ であるときに限って A は対角化可能である．P として

$$P = \left(\boldsymbol{p}_{1,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1,d_1}, \boldsymbol{p}_{2,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2,d_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{s,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{s,d_s}\right)$$

が取れ（固有ベクトルを並べた行列），このとき $D = P^{-1}AP$ は，対角線に

$$\underbrace{\alpha_1, \cdots, \alpha_1}_{d_1\text{ 個}}, \underbrace{\alpha_2, \cdots, \alpha_2}_{d_2\text{ 個}}, \cdots, \underbrace{\alpha_s, \cdots, \alpha_s}_{d_s\text{ 個}}$$

が，この順に並んだ対角行列になる．

5　対角化の練習

(A1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角化不可能であることを示せ．

(A2) 以下の行列の固有値を求めよ．

$$\text{(a).}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b).}\ \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c).}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(A3) (A2) の行列の固有ベクトルを求めよ．

(A4) (A2) の行列のうち，対角化可能なものはどれか？

(A5) (A4) の行列 A について $P^{-1}AP$ が対角行列になるような可逆行列 P を求めよ．

(A6) (A5) について，それぞれ $P^{-1}AP$ を求めよ（注意：逆行列と行列積の計算は不要）．

(A7) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$ が対角化可能かどうか調べよ（時間が余った人向け）．

(A8) 対角化可能な $n \times n$ 行列 A, B が，$AB = BA$ ならば，$P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ が対角行列になるような可逆な $n \times n$ 行列 P が存在することを示せ（解けることは想定されていません）．

6　雑談：選択公理（axiom of choice, AC）について

同値関係（equivalence relation）：集合 X 上の 2 項関係 $\sim$ が同値関係であるとは，以下が成り立つことである（注：2 項関係 $\sim$ は，普通，部分集合 $R \subseteq X \times X$ として形式化される）．

1. $\forall x \in X, x \sim x$（反射律）
2. $\forall x \in X, \forall y \in X, x \sim y \Rightarrow y \sim x$（対称律）
3. $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$（推移律）

AC：集合 X 上の同値関係 $\sim$ について，次をみたす部分集合 $Y \subseteq X$ が存在する．

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y, x \sim y$$

注意 1：背理法同様に AC は空気のように使われている．例えば，集合 X について，以下の同値性（i.e.,X **は無限集合である**）を証明するには，「3 ならば 1（あるいは 3 ならば 2)」に AC を用いる．

1. 単射 $\mathbb{N} \hookrightarrow X$ が存在する（i.e., 可算部分集合を持つ）
2. 全射ではない単射 $X \hookrightarrow X$ が存在する（i.e.,Dedekind 無限）
3. 任意の自然数 $n \geq 0$ について，全単射 $\{1, 2, \cdots, n\} \xrightarrow{\sim} X$ は存在しない（i.e., 有限でない）

注意 2：関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ について，以下の同値性（i.e.,f **は** $x = a$ **で連続である**）を証明するにも，AC を用いる．どちら向きが AC を使う向きだろう？（直観的で構わない）

1. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$（i.e.,$\varepsilon$-$\delta$ 論法の意味で連続）
2. $\forall (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$（i.e., 収束する点列を収束する点列に）

AC の話（その 1）：$X = \mathbb{R}$ に，$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ と定義すると，$\sim$ は $\mathbb{R}$ 上の同値関係である（確認すること）．このとき AC によって存在が保証されている Y について想像できるだろうか？

AC の話（その 2）：無限にたくさんの人（この無限集合を S とする）が，『カイジ』の地下世界で強制労働をさせられている．地下から抜け出すために，次の賭けに勝てばよいことになった．

- 全員が一斉に赤または白の帽子をかぶせられ，どの $x \in S$ も $S \setminus \{x\}$ の帽子の色が見える
- 以上の状況で $x \in S$ は，自分の帽子の色を何かしら答える
- S の人たちで「ペアをつくって相方の帽子の色を答える」など，事前に戦略を決めておくのは自由であるが，帽子をかぶせられた後に，S の人たちの間で連絡は取り合えない
- 帽子の色を当て間違えた S の人の数が有限ならば，S の勝ちで，全員地下から抜け出せる

AC を認めると必勝法 ω が**存在する**ことが分かる．他人の帽子の色は自分の帽子の色と無関係なので（$S \setminus \{x\}$ の帽子の色の情報は x の帽子の色に何の情報ももたらさない！），不思議である．なお実際に S の人たちが ω を**具体的に構成して**地下から抜け出すことは，おそらく不可能である．

7　バナッハ・タルスキのパラドックス（BTP, 1924 年）

AC の有名な帰結に BTP がある．これは**定理**であり，標語的に次のように言い表される．

BTP：球体をうまく有限個に分割して回転と平行移動をうまく施すと，同じ球体 2 つがえられる

今日は次を示すことを目標とする．BTP は，これを「包装紙にくるんで」えられる．

ハウスドルフのパラドックス（の類似物）：球面 $S^2 = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ を考える．このとき可算無限部分集合 $Q \subseteq S^2$ と，分解 $S^2 \setminus Q = X \bigsqcup X' \bigsqcup Z \bigsqcup Z'$ が存在して，$S^2 \setminus Q = X \bigsqcup A(X') = Z \bigsqcup B(Z')$ となる．ここで，A, B は以下の回転行列である．

$$A^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

名言 1（S. バナッハ）：A mathematician is a person who can find analogies between theorems. A better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories.（訳：数学者は定理の間に類似を見出せる人種であるが，より優れた数学者は証明の間の類似を理解し，最高の数学者は理論の間の類似に注目する）

8　証明の準備（線型代数編）

定義：G を A, B, A^{-1}, B^{-1} の有限の積のすべての集合とする（0 個の積は E_3 と約束する）．

注：G は次の性質をもつ（容易）：$E_3 \in G, \quad \forall g \in G, g^{-1} \in G, \quad \forall g \in G, \forall h \in G, gh \in G.$

定義：$X_1, \cdots, X_\ell \in \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}$ について，$1 \leq \exists j < \ell, (X_j, X_{j+1}) = (A^{\pm 1}, A^{\mp 1}), (B^{\pm 1}, B^{\mp 1})$ となるとき語（並び）$X_1 X_2 \cdots X_\ell$ は可約であるという（そうでないとき既約であるという）．

語 $X_1 X_2 \cdots X_\ell$ について，その通常の行列積を考えることができる．ただし $\ell = 0$ の語は ε と書き，これの積は E_3 であると約束する．

補題 1：$\ell \geq 0$ とする．任意の $X_1, \cdots, X_\ell \in \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}$ について，$X_1 X_2 \cdots X_\ell = E_3$ ならば（ここで左辺は語 $X_1 X_2 \cdots X_\ell$ の積），語 $X_1 X_2 \cdots X_\ell$ は可約である．

つまり A, B の間には $AA^{-1} = E_3 = A^{-1}A, BB^{-1} = E_3 = B^{-1}B$ を使ってえられる関係しか，乗法的な関係はないということである．これは「G はランク 2 の自由群である」と言い表される．

系 1：次の対応は全単射である：$\{$ 既約な語 $\} \to G, w \mapsto w$ の積.

補題 2：$\det M = 1, M^{-1} = {}^tM$ となる 3×3 行列 M を考える（このような M の集合は $SO(3)$ と書かれる）．$M \neq E_3$ ならば，$M\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ なる $\boldsymbol{v}$ が 0 でないスカラー倍を除いてただ 1 つ定まる．

系 2：$g \in G \setminus \{E_3\}$ について，$M\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ なる $\boldsymbol{v}$ が 0 でないスカラー倍を除いてただ 1 つ定まる．

9　証明の準備（パズル編）

定義：$X \in \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}$ について，X から始まる既約な語の集合を $W(X)$ と書く．

系 1 より $G = \{\varepsilon\} \bigsqcup W(A) \bigsqcup W(A^{-1}) \bigsqcup W(B) \bigsqcup W(B^{-1})$ である．さらに以下が成り立つ．

補題 3：$G = W(A) \bigsqcup AW(A^{-1}) = W(B) \bigsqcup BW(B^{-1})$

補題 4：$\Upsilon = \{A^{-n} \mid n \geq 1\}, \Omega_1 = W(A) \bigsqcup \{\varepsilon\} \bigsqcup \Upsilon, \Omega_2 = W(A^{-1}) \setminus \Upsilon$ について，

$$G = \Omega_1 \bigsqcup \Omega_2 \bigsqcup W(B) \bigsqcup W(B^{-1}) = \Omega_1 \bigsqcup A\Omega_2.$$

10　証明のスケッチ

1. $Q = \{\boldsymbol{v} \in S^2 \mid \exists g \in G \setminus \{E_3\}, g\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\}$ とする．
   (a)「G が可算無限」と，系 2 より，「Q も可算無限」である（「」には AC を普通は使う）．
   (b) $g \in G$ について，$gQ = Q, g(S^2 \setminus Q) = S^2 \setminus Q$ が成り立つ．
2. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^2 \setminus Q$ について，$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \exists g \in G, g\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とする．
3. $\sim$ は $S^2 \setminus Q$ 上の同値関係である（§8 の注による）．そこで AC により Y をとる．
4. 任意の $\boldsymbol{z} \in Y$ について，
   (a) 対応 $\Psi_{\boldsymbol{z}} : G \to X, g \mapsto g\boldsymbol{z}$ は単射である（Q の定義より）．
   (b) $\forall g \in G, \forall h \in G, \Psi_{\boldsymbol{z}}(gh) = g\Psi_{\boldsymbol{z}}(h)$ が成り立つ．
   (c) 像 $\Psi_{\boldsymbol{z}}(G)$ は $\boldsymbol{z}$ の同値類の集合 $C_{\boldsymbol{z}} = \{\boldsymbol{z}' \in S^2 \setminus Q \mid \boldsymbol{z} \sim \boldsymbol{z}'\}$ である（$\sim$ の定義より）．

補題 3（の後半）と補題 4 より，$\boldsymbol{z} \in Y$ について，

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{z}} = \Psi_{\boldsymbol{z}}(G) &= \Psi_{\boldsymbol{z}}(\Omega_1) \bigsqcup \Psi_{\boldsymbol{z}}(\Omega_2) \bigsqcup \Psi_{\boldsymbol{z}}(W(B)) \bigsqcup \Psi_{\boldsymbol{z}}(W(B^{-1})) \\ &= \Psi_{\boldsymbol{z}}(\Omega_1) \bigsqcup A\Psi_{\boldsymbol{z}}(\Omega_2) = \Psi_{\boldsymbol{z}}(W(B)) \bigsqcup B\Psi_{\boldsymbol{z}}(W(B^{-1})) \end{aligned}$$

だが，$S^2 \setminus Q = \bigsqcup_{\boldsymbol{z} \in Y} C_{\boldsymbol{z}}$ なので，以下が求める分割である．

$$X = \bigsqcup_{\boldsymbol{z} \in Y} \Psi_{\boldsymbol{z}}(\Omega_1), \quad X' = \bigsqcup_{\boldsymbol{z} \in Y} \Psi_{\boldsymbol{z}}(\Omega_2), \quad Z = \bigsqcup_{\boldsymbol{z} \in Y} \Psi_{\boldsymbol{z}}(W(B)), \quad Z' = \bigsqcup_{\boldsymbol{z} \in Y} \Psi_{\boldsymbol{z}}(W(B^{-1})).\text{(Q.E.D.)}$$

名言 2（B. ラッセル）：The Axiom of Choice is necessary to select a set from an infinite number of pairs of socks, but not an infinite number of pairs of shoes.（訳：無限にある靴下のペアから 1 つずつ選ぶのには選択公理が必要だが，靴のペアの場合は不要である）

名言 3（J. ボナ）：The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's lemma?（訳：選択公理は明らかに真であり，整列可能原理は明らかに偽である．ではツォルンの補題はどうでしょう？）

（コメント）選択公理，整列可能原理，ツォルンの補題は同値な命題ですが，ツォルンの補題は代数学における存在定理（e.g., 任意の線型空間の基底の存在）の証明に便利です．