- 演習の定期試験とレポートによって S2 の数学基礎理論演習の成績が決まります.
- 微積と線型合わせて 1 つの成績がつきます.
- 授業の成績は S2 の演習の成績には寄与しない予定です.
- 毎回出席をとりますが，S1 同様「50 可」の判定に使う程度で，成績にはほぼ関係しません.
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017s2.html` にあります（メッセージフォームにリンクを張っています．匿名で要望等あれば，お気軽にどうぞ).
- 問題を解く順序はありません．授業の深めることが目的なので，自分にあった問題に取り組んでください．友達と議論したり，web を調べるのもご自由に.
- 今日は行列式とテイラー展開・ロピタルの定理を扱います.
- 7/4 は休講です．7/18 に補講をします．7/25 をどうするかは考え中です.

1 テイラー展開・ロピタルの定理 ($a, b \in \mathbb{R}$ は，$a < b$ とする)

1.1 復習：最大値の定理とロルの定理

最大値の定理：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば，f は最大値 $d_{\max}$ と最小値 $d_{\min}$ を持つ.

（コメント）これはとても重要な定理である．とりあえず今回はこれの証明についてはふれない.

ロルの定理：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続，(a, b) で微分可能，$f(a) = f(b) = 0$ ならば，$a < \exists c < b, f'(c) = 0$.

（証明のスケッチ）最大値の定理より $(d_{\max}, d_{\min})$ が存在する．$(d_{\max}, d_{\min}) = (0, 0)$ ならば，f は恒等的に 0 の関数なので，$(d_{\max}, d_{\min}) \neq (0, 0)$ のときを扱う．対称性から $d_{\max} > 0$ としても一般性を失わない．このとき $f(c) = d_{\max}$ なる c は $f'(c) = 0$ を満たすことが示せる.

1.2 テイラー展開

テイラーの定理：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続で，(a, b) で n 回微分可能ならば，

$$\exists c \in (a, b), f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

（証明のスケッチ）定数 $M = (f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k)/(b-a)^n$ と定義する．以下の関数

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - M(x-a)^n$$

について，$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0$ と $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!M$ が確認できる.

今 $g(a) = 0$ で，M の定義より $g(b) = 0$ なので，ロルの定理より $\exists c_1 \in (a, b), g'(c_1) = 0$ である．すると $g'(a) = g'(c_1) = 0$ なので，ロルの定理より $\exists c_2 \in (a, c_1), g''(c_2) = 0$ である．繰り返すと $\exists c_n \in (a, c_{n-1}), g^{(n)}(c_n) = 0$ となる．この c_n が求める c である.

1.3 ロピタルの定理

コーシーの平均値定理：関数 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続で，(a,b) で微分可能とする．さらに $\forall x \in (a,b), g'(x) \neq 0$ を仮定すると，

$$\exists c \in (a,b), \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

（証明のスケッチ）まず左辺の分母は 0 にならないことに注意する．実際，$g(a) = g(b)$ ならば，ロルの定理によって $\exists c \in (a,b), g'(c) = 0$ となって，仮定に反する．今，関数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi(x) = (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$$

と定義する．これは $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ となっていて，$[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能なので，$\exists c \in (a,b), \varphi'(c) = 0$．$\varphi'(c) = 0$ を書き直すと，$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ となる．

（注）コーシーの平均値定理において，$g(x) = x$ としたものが，平均値の定理である．

ロピタルの定理：f, g を $x = a$ を含む開区間 U で定義された微分可能な連続関数とする．3 条件

1. $f(a) = g(a) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{a\}, g'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ が存在する

が満たされるとき，$\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ も存在し，$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ が成り立つ．

（注）ロピタルの定理には，片側極限について述べたものや，$a = \infty$ とするもの，∞/∞ の不定形を扱うものなどがある．また 3 条件の述べ方が微妙に異なる version もある（e.g.,f, g が C^1 であることを仮定するなど）．

（証明のスケッチ）平均値の定理より，$\forall x \in U \setminus \{a\}, \exists c, (f(x)-f(a))/(g(x)-g(a)) = f(x)/g(x) = f'(c)/g'(c)$（ここで $\varepsilon > 0$ を用いて $x = a \pm \varepsilon$ のとき，$c \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ である）．$x \to a$ とすると，$c \to a$ で，再右辺の存在が仮定されているのだった．

（名言, V.I. アーノルド）If a notion bears a personal name, then this name is not the name of the discoverer.（訳：概念に人の名前がついている場合，それは発見者の名前ではない）

（コメント）ロピタルの定理は，ベルヌーイによるものと言われている．なお上の名言は「アーノルドの原理」と引用されるが，これは「科学的発見に第一発見者の名前がつけられることはない」というスティグラーの法則（wiki を参照）より後に主張されたものが「アーノルドの原理」と呼ばれているため，「アーノルドの原理」自体がそのような実例になっている（つまり，アーノルドの原理は，アーノルドの発見ではない！）．ただし，同じことはスティグラーの法則にも当てはまる．

2　練習問題その 1($n \geq 1$ とする)

(A1) $x = a$ のまわりで定義された n 回微分可能な関数 f について，

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を，f の $x = a$ における n 次のテイラー多項式という．

次の f について，$x = 0$ における n 次のテイラー多項式を具体的に求めよ．

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \sin x$
3. $f(x) = \log(1+x)$
4. $f(x) = \cosh x$

(A2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で，(a,b) で微分可能で，$\lim_{x \to a+0} f'(x) = \gamma$ が存在するとき，$\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \gamma$ を示せ（特に f は $x = a$ で片側微分可能である）．

(A3) 次の極限を求めよ．

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}$

(A4)

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{1} = 0$ は何故正しくないか？
2. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{e^x - 1}$ にロピタルの定理が適用できない理由を説明し，この極限値を求めよ．
3. 2 ページに述べたロピタルの定理を

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(f(x) - f(0))/x}{(g(x) - g(0))/x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

と証明することについて，コメントを述べよ．

(A5) $x = a$ のまわり U で定義された n 回微分可能な関数 f について，以下の関数を考える（これは $U \setminus \{a\}$ で定義されている）．

$$H(x) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) / (x-a)^n.$$

1. $f^{(n)}$ が連続であれば $\lim_{x \to a} H(x) = 0$ を示せ．
2. 「$f^{(n)}$ が連続」という仮定を外し，単に「n 回微分可能」のとき，どうだろうか？

(A6) 実係数多項式 $f(x)$ の（ゼロでない）項の数が n 個のとき，$f(x) = 0$ の実数解は高々 $2n-1$ 個であることを示せ．

3 行列式

3.1 行列式の定義

以下 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を $n\times n$ 行列とする（成分は何でもよいので，ここでは実数成分としよう）．$\det A := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ を A の行列式（determinant）とよぶ．

置換 n 点集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ からそれ自身への全単射 $\sigma : \{1,2,\cdots,n\} \xrightarrow{\sim} \{1,2,\cdots,n\}$ のこと．この集合を $\mathfrak{S}_n$ と表す．$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ のように 2 行表示される．

転倒数 $\mathrm{trans}(\sigma) = |\{1 \le i < j \le n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}|$.

符号 $\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = (-1)^{\mathrm{trans}(\sigma)}$.

サラスの方法 2×2 行列と 3×3 行列の行列式を定義通り求めること．

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

3.2 行列式の特徴づけ

普通 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ と成分を用いて表されるが，A の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j$ と書くことにすれば，$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とも表せる．なお $\det((\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n))$ を，しばしば $\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とも書く．例えば $n = 3$ で $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ならば，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ である．

$n\times n$ 行列の集合を $M_n(\mathbb{R})$ と書く．行列式 det は関数 $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ で，次の ①, ②, ③ を満たす．逆に ①, ②, ③ を満たす関数 $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は det に限る（授業で証明する）．

① 列に関する線型性 $1 \le i \le n$ を選んで $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ を固定する．このとき任意の $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in \mathbb{R}^n$ について，

$$\begin{aligned} \det((\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \lambda\boldsymbol{b} + \lambda'\boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)) &= \lambda \det((\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)) \\ &\quad + \lambda' \det((\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)) \end{aligned}$$

② 列に関する交代性 ある $1 \le i < j \le n$ について，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ ならば，$\det A = 0$ となる．

③ 単位行列についての正規化 E_n を n 次単位行列

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$\det E_n = 1$ が成立する．

3.3　行列式の性質

転置不変性　$\det(A^T) = \det A$

乗法を保存すること　$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

上三角行列についての振る舞い　A が以下の上三角行列であれば，$\det A = a_1 \cdots a_n$ と対角成分の積で与えられる．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & O & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

4　余因子

$n \times n$ 行列 A の i 行 j 列を削除し，$(n-1) \times (n-1)$ 行列 B を得たとする．$(-1)^{i+j} \det B$ を A の (i,j) 余因子と呼び，$\widetilde{a}_{ij}$ と書く．

余因子行列：$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ について，

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{n2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{a}_{2n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

で与えられる $n \times n$ 行列（転置に注意）．$\det A \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$.

余因子展開：$n \times n$ 行列 A の $\det A$ を再帰的に求める方法.

(i 行) $\det A = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in}$
(j 列) $\det A = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a}_{nj}$

以下は，4×4 行列の 1 列に関する余因子展開である．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

5　練習問題その 2

(C1)　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行列式と余因子行列は何か？

(C2)　$1+\omega+\omega^2=0$ のとき，余因子行列を用いて $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(C5)　以下の 4×4 行列の行列式を求めよ．

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}.$$

(C6)　連立方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ を考える．今

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad ,\boldsymbol{a}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と置く．$\det((\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n))\neq 0$ と仮定するとき，クラメルの公式

$$x_1=\frac{\det((\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n))}{\det((\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n))}$$

を示せ（ヒント 1：元の連立方程式は $\boldsymbol{b}=x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$ と等価である．ヒント 2：行列式の列に関する多重線形性と交代性を思い出す)．

(C7)　クラメルの公式を用いて, 次の連立方程式を解け．$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

(A1) 1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$ を x^n までで打ち切ったもの

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} x^k/k$ を x^n までで打ち切ったもの

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}/(2k)!$ を x^n までで打ち切ったもの

(A2) $0 < h \le b-a$ について，平均値の定理より $\exists c \in (a, a+h), \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(c)$ が成り立つ．$h \to +0$ のとき，$c \to +a$ なので，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{c\to a+0} f'(c) = \gamma$ である．

(A3) すべてロピタルの定理で計算できる（適用条件の確認は省略する）.

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2)^{-1/2}}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{(1-x^2)^{-3/2}(-2x)/2}{6x} = -\frac{1}{6}.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x-\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2\cos(2x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{-2\sin x+4\sin(2x)}{\sin x} = 6.$

(A4) 1. 2 ページのロピタルの定理において，条件 1 が満たされていない．

2. $(x^2\sin(1/x))' = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ なので，2 ページのロピタルの定理において，条件 3 が満たされていない．$x \neq 0$ について，テイラーの定理より $\exists\theta \in (0,1), e^x - 1 = x + (\theta x)^2/2$ となる．$0 < |x| < 1$ であれば

$$\left|\frac{x^2\sin(1/x)}{e^x-1}\right| \le \left|\frac{x^2}{x+(\theta x)^2/2}\right| \le |x|\frac{1}{1-1/2} = 2|x|$$

なので $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin(1/x)}{e^x-1} = 0$ である．

3. $\displaystyle\frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ に，f', g' が $x=0$ で連続であることを用いている．したがって 2 ページのロピタルの定理より強い仮定のもとで証明していることになる（実用上はそれで十分かもしれない）．

(A5) 1. テイラーの定理より，a のまわりの $x = a \pm \varepsilon$ について（ここで $\varepsilon > 0$），

$$\exists c, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

ここで $x = a+\varepsilon, a-\varepsilon$ に応じて，$c \in (a, a+\varepsilon), (a-\varepsilon, a)$ である．よって

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

なので $H(x) = (f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a))/n!$ となる．$x \to a$ のとき $c \to a$ となるが，$f^{(n)}$ は連続なので $\displaystyle\lim_{c\to a} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a)$ が成り立つ．したがって $\displaystyle\lim_{x\to a} H(x) = 0$ である．

2. 成り立つ．n についての帰納法で示す．$n=1$ のとき，

$$H(x)=\frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$$

なので，f が微分可能であれば，定義によって $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))/(x-a)=f'(a)$ なので，$\lim_{x\to a}H(x)=0$ である．
$n\geq 2$ のとき，

$$\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)'=f'(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

に注意する．$f^{(k+1)}(a)=f'^{(k)}(a)$ であり，f' は $n-1$ 回微分可能なので

$$\lim_{x\to a}\left(f'(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)/(x-a)^{n-1}=0$$

が帰納法の仮定から従う．よって $\lim_{x\to a}H(x)$ の計算にはロピタルの定理が使え，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}H(x)&=\lim_{x\to a}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)/(x-a)^n\\&=\lim_{x\to a}\left(f'(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)/n(x-a)^{n-1}=0.\end{aligned}$$

(A6) n についての帰納法で示す．$n=1$ のとき，$f(x)=ax^r$ という形をしているので，解は $x=0$ の 1 個である（ここで $a\neq 0, r\geq 0$）．$n\geq 2$ のとき，$f(x)=x^s g(x)$ と書き直す．ここで $s\geq 0$ で，$g(x)$ は定数項が 0 でない多項式である．g の実数解を $x_1<\cdots<x_m$ とすると

$$\exists y_1\in(x_1,x_2),\cdots,\exists y_{m-1}\in(x_{m-1},x_m), g'(y_1)=\cdots=g'(y_{m-1})=0$$

となる（$\because$ ロルの定理）．今，g も f と同じ仮定「項の数が n 個」を満たすので，g' は「項の数が $n-1$ 個」である．よって帰納法の仮定より $m-1\leq 2(n-1)-1$ が成り立つ．f の解は $x_1,\cdots,x_m,0$ の $m+1$ 個あり，$m+1\leq 2(n-1)+1=2n-1$ となっている．