- 今日はニュートン法と戸瀬さんの教科書 3 章を扱います．
- 7/18 に補講をします．7/4 は代講を予定していて，7/25 は休講を予定しています．

1 ロピタルの定理の復習

最大値の定理：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば，f は最大値と最小値を持つ．

ロルの定理：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続，(a, b) で微分可能，$f(a) = f(b)$ ならば，

$$a < \exists c < b, f'(c) = 0.$$

コーシーの平均値定理：関数 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続で，(a, b) で微分可能とする．さらに $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ を仮定すると，

$$\exists c \in (a, b), \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ロピタルの定理 A：f, g を $x = a$ を含む開区間 U で定義された微分可能な連続関数とする．3 条件

1. $f(a) = g(a) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{a\}, g'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ が存在する

が満たされるとき，$\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ も存在し，$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ が成り立つ．

（注）：ロピタルの定理にはさまざまな変種があるので，証明を理解しておくことが重要である．

よくある証明の流れ：最大値 $\rightsquigarrow$ ロル $\rightsquigarrow$ コーシー $\rightsquigarrow$ ロピタル

2 ニュートン法の復習

テイラーの定理：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続で，(a, b) で n 回微分可能ならば，

$$\exists c \in (a, b), f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b - a)^n.$$

ニュートン法：f を α のまわり U で定義された微分可能な関数で，$f(\alpha) = 0$ とする．初期値 x_0 を α の近くにとり，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

を反復していくことで，$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$ と α を求めること（常に可能とは限らない）．

よくある証明の流れ：最大値 $\rightsquigarrow$ ロル $\rightsquigarrow$ テイラー $\rightsquigarrow$ ニュートン

（注）：ニュートン法で数列 $(x_n)_{n\geq 0}$ が α に収束するためのよくある条件に

1. f は C^3 級
2. $f'(\alpha) \neq 0$
3. x_0 は α に近い

というものがある（演習問題 A4 を参照）．ニュートン法の大域的な収束については，分かっていないことが多い（演習問題 A5 を参照）．

3 練習問題

(A1) $x = a$ のまわりで定義された n 回微分可能な関数 f について，

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を，f の $x = a$ における n 次のテイラー多項式という．

1. $f(x) = \arctan x$ について，$x = 0$ における n 次のテイラー多項式を具体的に求めよ．
2. マチンの公式 $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ を示せ．
3. π の近似値を求めよ（誤差評価はしなくてよい）．
4. π の定義は何だろう？（発展課題, 円周を持ち出す場合，円周の定義は何でしょう？）

（名言, H. ポワンカレ）水源は不明でも，それでも川は流れている．

(A2) 次の極限を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(\cos x) + x^2}{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x}$

(A3) C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$ を考える．

1. 初期値 $x_0 = 2$ を選んで，ニュートン法を実行し，x_1, x_2, x_3, x_4 を求め，$\sqrt{2}$ と比較せよ．
2. 漸化式 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = (x_n + 2/x_n)/2$ に，授業でならった以外の幾何学的意味は見出せるだろうか？

(A4) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続で，(a,b) で 2 回微分可能とする．以下を仮定する．

- $f(a) < 0, f(b) > 0$
- $\exists D > 0, \forall x \in (a,b), f'(x) \geq D$

1. $\exists! \alpha \in (a,b), f(\alpha) = 0$ を示せ．
2. $x_0 = b$，$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ によって数列 $(x_n)_{n\geq 0}$ を定める．以下を示せ．

$$\forall n \geq 0, \exists c_n \in (a,b), x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$$

3. $\exists C>0, \forall x\in(a,b), 0<f''(x)\leq C$ のとき，以下を示せ（ここで $A=C/2D$）．

$$0<x_n-\alpha<A^{-1}(A(x_0-\alpha))^{2^n}$$

4. (A3) において，$x_n-\sqrt{2}$ の評価を与えよ．

(A5) ニュートン法とフラクタルの関係を調べよ（発展課題）．

(A6) $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ は微分可能とする．$\lim_{x\to+0}f'(x)$ が存在するとき，以下を示せ（発展課題）．

1. $\lim_{x\to+0}f(x)$ が存在する．
2. これを $f(0)$ として $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ に拡張すると，$f'_+(0)=\lim_{x\to+0}f'(x)$ がなりたつ．

（コメント）これを使うと「f は C^∞ 級かつ $\forall n\geq 0, f^{(n)}(0)=0$」であること（今日，授業で示した）が，授業とは微妙に異なる方法で導出できます（レポートで出すかも）．ここで

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0). \end{cases}$$

4 掃出し法のまとめ

正則行列 (invertible matrix) $n\times n$ 行列 A であって，ある $n\times n$ 行列 B が存在して，$AB=E_n=BA$ となるもの（非自明な定理として，$AB=E_n\Leftrightarrow BA=E_n$ が証明できる）．この B は唯一つ存在することが証明でき，$B=A^{-1}$ と書かれる．いくつかの同値な特徴づけを持つ：

1. $\det(A)\neq 0$
2. $\operatorname{rank}(A)=n$
3. $(A|E_n)$ を行基本変形のみで $(E_n|B)$ にできる（このとき $B=A^{-1}$）

係数行列と拡大係数行列 (expanded coefficient matrix) n 未知変数 m 立連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

は，行列積を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書き直せる．ここで $A:=(a_{ij})_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}$ は $m\times n$ 行列で，$\boldsymbol{x}:=(x_i)_{i=1}^n$ は n 次元ベクトル，$\boldsymbol{b}:=(b_i)_{i=1}^m$ は m 次元ベクトルである．A がこの連立方程式の係数行列で，$m\times(n+1)$ 行列 $(A,\boldsymbol{b})$ は拡大係数行列と呼ばれる．

クラメルの公式 (Cramer's formula) 上で $m=n$ のとき，係数行列を $A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ のように n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ を並べた形で書く．連立方程式の解は，$\det A\neq 0$ ならば

$$x_1=\frac{\det(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)},\quad x_2=\frac{\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n)},\quad\cdots$$

行基本変形 (basic row operation)　以下の 3 つの操作のこと

1. i 行と j 行を入れ替える（$i \neq j$）
2. i 行に，K の非ゼロ元 c をかける（$c \neq 0$）
3. i 行に，j 行の K の元 c 倍を加える（$i \neq j,\, c \in K$）

連立方程式の拡大係数行列に行基本変形を施しても，同値な連立方程式が得られる．

掃出し法 (Gaussian elimination, row reduction)　行列に行基本変形を施して，階段行列にすること．連立方程式の拡大係数行列に掃出し法を施すと，同値で簡単な連立方程式が得られる．

後退代入 (backward substitution)　階段行列が係数行列の連立方程式を，逆向きに体系的に解く（あるいは解けないことを示す）こと．

階段行列 (echelon matrix)　ある r が存在して

1. $(r+1)$ 行目から最終行までは，すべて 0
2. 1 行目から r 行目の各行には，pivot が 1 つずつ存在して
   - pivot は「だんだん右に」分布する
   - どの pivot も「その左と下」の数（ないかもしれない）は 0 になっている

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1} & \cdots & & & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{r,j_r} & \cdots \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}$$

のような行列のこと（ここで $j_1 < j_2 < \cdots < \cdots < j_r$ かつ $a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{r,j_r} \neq 0$）．ここで非ゼロな数 $a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \cdots, a_{r,j_r}$ は **pivot**（枢軸）と呼ばれる．

(A1) 1. $a_m = f^{(m)}(0)$ とする．$f' = 1/(1+x^2)$ より，$(1+x^2)f' = 1$．これを m 回微分すると，ライプニッツ則 $(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}g^{(m-k)}$ より，$(1+x^2)f^{(m+1)} + 2mxf^{(m)} + m(m-1)f^{(m-1)} = 0$．よって $a_{m+1} + m(m-1)a_{m-1} = 0$ がわかる．$a_0 = \arctan 0 = 0$, $a_1 = f'(0) = 1$ と漸化式より $a_{2m} = 0, a_{2m+1} = (-1)^m(2m)!$ なので，答えは $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$ を x^n で打ち切ったもの．

2. $\tan a = 1/5, \tan b = 1/239$ とする．加法公式より $\tan(2a) = (2\tan a)/(1-\tan^2 a) = 5/12, \tan(4a) = (2\tan(2a))/(1-\tan^2 2a) = 120/119$, $\tan(4a-b) = (\tan 4a - \tan b)/(1+\tan 4a \tan b) = 1$．$a = \arctan 1/5, b = \arctan 1/239$ とすると，$\tan(4a-b) = 1$ より $\exists m \in \mathbb{Z}, 4a - b = \pi/4 + m\pi$ となる．$0 < a, b < \pi/4 = \arctan 1$ より，$-\pi/4 < 4a - b < \pi$ なので，$m = 0$，すなわち $4a - b = \pi/4$ である．

3. $5^{-6} = (0.2)^7 = 0.0000128$ と $239^{-3} = 1/13651919 < 10^{-7}$ に注目して，

$$\arctan\frac{1}{5} \fallingdotseq \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} = 0.1973955\cdots$$
$$\arctan\frac{1}{239} \fallingdotseq \frac{1}{239} = 0.0041841\cdots$$

と打ち切ると，$\pi \fallingdotseq 16\cdot 0.1973955 - 4\cdot 0.0041841 = 3.14159\cdots$ となる．

(A2) ロピタルの定理が適用できることの確認は省略する．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)^{-1}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-2}}{2} = 1/2.$

2. $\displaystyle\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x\cos x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{24x} = \lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{24} = 1/3$．よって求める極限は，$\displaystyle\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} = 1/3.$

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots, e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \cdots$ より，$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2 + x^6/6 + \cdots$, $\sin^2 x = x^2 - x^4/3 + (1/60 + 1/36)x^6 + \cdots$ なので，$e^{x^2} - 1 - \sin^2 x = 5x^4/6 + \cdots$ である．$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}, \log(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - \cdots$ より，$\log(\cos x) = -x^2/2 - (1/8 - 1/24)x^4 + \cdots$ なので，$2\log(\cos x) + x^2 = -x^4/6 + \cdots$．よって求める極限は $-1/5$（正当化はおまかせします）．

(A3) 1. $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = (x_n + 2/x_n)/2$ より，

$$\begin{array}{lll}
x_0 & 2 & 2 \\
x_1 & \left(2+\frac{2}{2}\right)/2 = \frac{3}{2} & 1.5 \\
x_2 & \left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)/2 = \frac{17}{12} & 1.\underline{41}66666\cdots \\
x_3 & \left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right)/2 = \frac{577}{408} & 1.\underline{41421}568\cdots \\
x_4 & \left(\frac{577}{408}+\frac{816}{577}\right)/2 = \frac{665857}{470832} & 1.\underline{414213562374}\cdots \\
\sqrt{2} & & 1.41421356237309\cdots
\end{array}$$

2. $\sqrt{2}$ は面積が 2 の正方形の辺の長さである．ニュートン法でえられる漸化式 $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$ は，「縦 x_n, 横 $2/x_n$ の面積が 2 の長方形から，安直に平均をとることで正方形をえている」とも解釈できる．

(A4)

1. 中間値の定理より $\exists\alpha \in (a,b), f(\alpha)=0$ である．$\forall x \in (a,b), f'(x)>0$ より，f は狭義増加関数である（平均値の定理の系！）から，このような α はただ 1 つ存在する．
2. テイラーの定理より，$\exists c_n \in (a,b), f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(\alpha - x_n)^2$ となる（注：実際には c_n は α と x_n の間にある）が，これを $f'(x_n) \neq 0$ で割ると，
$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n + \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2.$$
$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ より，$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$ となる．
3. 2 より $0 < x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2 \leq A(x_n - \alpha)^2$．すなわち $0 < A(x_{n+1} - \alpha) \leq (A(x_n - \alpha))^2$ である．これより帰納的に $0 < A(x_n - \alpha) \leq (A(x_0 - \alpha))^{2^n}$ が従う．
4. $f(x) = x^2 - 2$ で $a = 1, b = 2$ と設定すると，$D = 1, C = 2$ と取れる（よって $A = 1$）．$2 - \sqrt{2} < 0.6$ より，$x_n - \sqrt{2} < (0.6)^{2^n}$．$\log_{10}\left(0.6^{2^n}\right) \fallingdotseq -2^n \cdot 0.22$ より，x_n は $\sqrt{2}$ と少なくとも $2^n/5$ 桁は一致しているということである．

(A5) A. ケーリーは 1879 年に，$f(z) = z^3 - 1$ にニュートン法を適用し，収束していく様子を記述する問題を提起した．以下のように実験できる（1 は BSD 系 OS では wget ではなく fetch かもしれません）．青が $z = 1$ に収束する領域，赤が $\omega := (-1 + \sqrt{-3})/2$ に収束する領域，緑が $\overline{\omega} = \omega^2$ に収束する領域である．

1. `wget http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/test_fr.cpp`
2. `g++ test_fr.cpp -std=c++0x -O3 -o test_fr`
3. `./test_fr 5.0 0.01`
4. `gnuplot`
5. `set size square`
6. `set xrange [-7.5:7.5]`
7. `set yrange [-7.5:7.5]`
8. `plot "h1" with dots lc rgb "red","h0" with dots lc rgb "blue","h2" with dots lc rgb "green"`
9. `quit`