- 今日は **2 変数関数の微分可能性**と戸瀬さんの教科書 4 章を扱います．
- 7/4 は代講，7/11 は通常通り，7/18 は補講，7/25 は休講です．

1 授業のまとめ

開集合・閉集合：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と $r > 0$ について

$$U(\boldsymbol{x}; r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < r\}$$

を，中心が $\boldsymbol{x}$ の半径が r 開円盤とよぶ（ここで $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ について $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$）．

- $U \subseteq \mathbb{R}^2$ が開集合とは，$\forall \boldsymbol{x} \in U, \exists r > 0, U(\boldsymbol{x}; r) \subseteq U$
- $C \subseteq \mathbb{R}^2$ が閉集合とは，$\mathbb{R}^2 \setminus C$ が開集合

（注）これから $S \subseteq \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f : S \to \mathbb{R}$ の，$\boldsymbol{x} \in S$ における連続性や微分可能性を考えるが，普通は $\exists r > 0, U(\boldsymbol{x}; r) \subseteq S$ という状況で考える（このことを，ここでは「f は $\boldsymbol{x}$ のまわりで定義された」とぼかして表現する）．こうなっていないと気持ちわるいからである．

連続性：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f が，$\boldsymbol{x}$ で連続とは

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}).$$

（注）$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ として，ε-δ 論法で明示的に書き下すと：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (z_1, z_2) \in S, \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(z_1, z_2) - f(x_1, x_2)| < \varepsilon.$$

微分可能性：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f が，$\boldsymbol{x}$ で微分可能とは（ここで $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}$ は内積である）

$$\exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2, \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|} = 0. \tag{1}$$

（注）微分可能であることは，偏微分可能性と区別するため，しばしば全微分可能ともよばれる．

偏微分可能性：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f が，$\boldsymbol{x}$ で第 i 方向に偏微分可能とは（$i = 1, 2$）

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

が存在することで，この値を $\partial_i f(\boldsymbol{x})$ と書く．ここで $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ である．

（注）$\partial_i f(\boldsymbol{x})$ はもちろん「$\partial_i f$ の $\boldsymbol{x}$ での値」という意味である（$f(\boldsymbol{x})$ はただの数なので，これの ∂_i は変である）．$i = 1, 2$ に応じて，$\partial_i f$ は $\partial_x f, \partial_y f$ や $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ とも書かれる．以下，第 1 方向と第 2 方向共に偏微分可能なことを，単に偏微分可能と略記する．

授業で示したこと：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f について：

1. $\boldsymbol{x}$ で全微分可能ならば，$\boldsymbol{x}$ で連続である
2. $\boldsymbol{x}$ で全微分可能ならば，$\boldsymbol{x}$ で偏微分可能で $\partial_i f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i$（(1) の記法を用いた）
3. f が $\boldsymbol{x}$ で連続偏微分可能（C^1 級）ならば，f は $\boldsymbol{x}$ で全微分可能である

（注）このうち 3 は重要である（連続偏微分可能は「連続かつ偏微分可能」ではなく，「偏微分可能で偏微分が連続」である）．証明の要点は，

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = (f(x+h, y+k) - f(x+h, y)) + (f(x+h, y) - f(x,y))$$

と変形し，平均値の定理を用いることであった：

$$\begin{aligned}
&0 < \exists\theta_1 < 1, f(x+h, y) - f(x,y) = \partial_x f(x+\theta_1 h, y)h \\
&0 < \exists\theta_2 < 1, f(x+h, y+k) - f(x+h, y) = \partial_y f(x+h, y+\theta_2 k)k.
\end{aligned}$$

ここまでで偏微分可能性は用いているが，偏微分の連続性は用いていないことに注意しよう．

2　練習問題

(A1) 上の「証明の要点」の残りを完成せよ．

(A2) 次の方程式を求めよ．
1. 曲面 $z = x^2 + y^2$ の点 $(1,2,5)$ における接平面
2. 曲面 $z^2 = xy$ の点 $(1,4,2)$ における接平面

(A3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ として

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+xy+y^2)\log(x^2+y^2) & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

を考える．これが $\mathbf{0}$ で微分可能かどうか調べよ．

(A4) f は $\boldsymbol{x}$ のまわり U で定義されており，偏微分可能で，偏微分は U で有界（i.e.,$\forall i = 1,2, \exists K_i > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U, |\partial_i f(\boldsymbol{x})| < K_i$）とする．$f$ は $\boldsymbol{x}$ で連続であることを示せ．

(A5) 単に偏微分可能なだけでは，全微分可能性は従わない．授業で挙げた例 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は，次のようなものだった：
- f は $\mathbf{0}$ で偏微分可能
- f は $\mathbf{0}$ で連続ではない（ので，全微分不可能である）

授業で挙げた例の他に，次のような関数 f が欲しい：
- f は $\mathbf{0}$ で連続でかつ偏微分可能

– f は $\mathbf{0}$ で全微分可能ではない

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ として

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

を考えると，そのような例になっていることを示せ．

(A6) 開集合や閉集合に関連して，以下を示せ：

1. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と $r > 0$ について，開円盤 $U(\boldsymbol{x}; r) \subseteq \mathbb{R}^2$ は開集合である（自明ではない！）
2. $\mathbb{R}^2$ の列 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を考え，$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$ であるとする．今，閉集合 $C \subseteq \mathbb{R}^2$ について $\forall n \geq 1, \boldsymbol{a}_n \in C$ となっているとすると，$\boldsymbol{a} \in C$ を示せ．

(A1) $\Delta(h,k)=f(x+h,y+k)-f(x,y)-\partial_x f(x,y)h-\partial_y f(x,y)k$ として，$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\Delta(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}=0$ を示せばよい．「証明の要点」より

$0<\exists\theta_1,\exists\theta_2<1,\Delta(h,k)=(\partial_x f(x+\theta_1 h,y)-\partial_x f(x,y))h+(\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)-\partial_y f(x,y))k$

なので，三角不等式より

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\le |\partial_x f(x+\theta_1 h,y)-\partial_x f(x,y)|\cdot\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}+|\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)-\partial_y f(x,y)|\cdot\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &\le |\partial_x f(x+\theta_1 h,y)-\partial_x f(x,y)|+|\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)-\partial_y f(x,y)|.\end{aligned}$$

$(h,k)\to(0,0)$ のとき，$\theta_1 h\to 0,\theta_2 k\to 0$ で $\partial_x f,\partial_y f$ は $\boldsymbol{x}$ で連続だから，$\partial_x f(x+\theta_1 h,y)\to\partial_x f(x,y),\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)\to\partial_y f(x,y)$．よって $\Delta(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ がわかった．

(A2) 1. $\partial_x z=2x,\partial_y z=2y$ より，$z=5+2(x-1)+4(y-2)$.

2. $z=\pm\sqrt{xy}$ であるが，今問題になっているのは $z=\sqrt{xy}$ のほうなので，$\partial_x z=\sqrt{y/x}/2,\partial_y z=\sqrt{x/y}/2$ である．よって $z=2+(x-1)+(y-4)/4$.

(A3) 微分可能である．$\lim_{h\to+0}h\log h=0$（詳細略）に注意すると，$\partial_x f(\mathbf{0})=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\log(h^2)}{h}=0=\partial_y f(\mathbf{0})$．さらに $f(\mathbf{0})=0$ なので，$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}f(\boldsymbol{h})/|\boldsymbol{h}|=0$ を示せばよい．$\boldsymbol{h}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと（$r>0,0\le\theta<2\pi$），$x^2+y^2=r^2,xy\le r^2$ より，$|f(\boldsymbol{h})/|\boldsymbol{h}||\le 2r^2\log(r^2)/r=4r\log r$．$\boldsymbol{h}\to 0$ は $r\to+0$ と同値なので，$\boldsymbol{h}\to 0$ とすると $f(\boldsymbol{h})/|\boldsymbol{h}|\to 0$ となる．

(A4) $K=\max\{K_1,K_2\},\Delta(h,k)=f(x+h,y+k)-f(x,y)$ とする．「証明の要点」より

$$0<\exists\theta_1,\exists\theta_2<1,\Delta(h,k)=\partial_x f(x+\theta_1 h,y)h+\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)k$$

なので，三角不等式より $|\Delta(h,k)|\le K(|h|+|k|)$．よって $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\Delta(h,k)=0$ をえる．

(A5) $(x,y)\neq(0,0)$ であれば $\partial_x f=x^2(x^2+3y^2)/(x^2+y^2)^2,\partial_y f=-2x^3y/(x^2+y^2)^2$ はやさしい．$h\neq 0$ のとき $f(h,0)=h,f(0,h)=0$ から，$\partial_x f((1,0))=1,\partial_y f((0,1))=0$ もわかる．したがって f は偏微分可能である．$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ とすると（$r>0$），$|\partial_x f|=|1+2\sin^2\theta|\le 3,|\partial_y f|=|-2\cos^3\theta\sin\theta|\le 2$ より，$\partial_x f,\partial_y f$ は $\mathbb{R}^2$ で有界である．よって (A4) が適用できて（$\boldsymbol{x}=\mathbf{0},U=\mathbb{R}^2$ とする），f は $\mathbf{0}$ で連続であることが従う．

(A6) 1. $\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{x};r)$ について，$\exists r'>0,U(\boldsymbol{y};r')\subseteq U(\boldsymbol{x};r)$ を示せばよい．そのためには $r'=r-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ ととれることを示せば十分である（$\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{x};r)$ なので $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r$ より $r'>0$ に注意）．そのためには，任意の $\boldsymbol{z}\in U(\boldsymbol{y};r')$ について，$\boldsymbol{z}\in U(\boldsymbol{x};r)$ であることを言えばよく，つまり $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|<r$ を言えばよい．三角不等式より

$$|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|\le|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r'+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=r$$

と，望みどおり示された．

2. $\boldsymbol{a}=(x,y),\boldsymbol{a}_i=(x_i,y_i)$ とする．$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^2\setminus C$ とすると，$\mathbb{R}^2\setminus C$ は開集合だから $\exists r>0,U(\boldsymbol{a};r)\subseteq(\mathbb{R}^2\setminus C)$．一方で $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}$ なので，$\exists N>0,\forall n>N,|\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}|<r$．これは $n>N$ ならば $\boldsymbol{a}_n\in U(\boldsymbol{a};r)\subseteq(\mathbb{R}^2\setminus C)$ を導き，$\forall n\ge 1,\boldsymbol{a}_n\in C$ に矛盾する．