- 今日は**陰関数定理・ラグランジュ未定乗数法**と戸瀬さんの教科書 4 章を扱います.
- 7/18 は補講，7/25 は休講です.
- レポートは 7 月 18 日（火）13:00 までに，教務課のレポートボックスに提出してください.
- レポート問題 1 番について「電卓を使ってもよいかどうか」の質問がありました．論理が通っていれば何でも OK です.
- 選択公理は試験範囲外です.

1 陰関数定理

弧状連結：$\mathbb{R}^2$ の部分集合 S が弧状連結とは，任意の $a, b \in S$ について，連続関数 $\gamma : [0,1] \to S$ であって，$\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ なるものが存在することをいう.

領域：$\mathbb{R}^2$ の弧状連結な開集合は領域とよばれる.

（注）2 変数関数の解析学を展開する場合，領域で定義された関数を考えるのが普通だが，開集合でも成り立つ定理（例えば陰関数定理）と，領域で成り立つ定理（例えば平均値の定理）がある.

陰関数：$\mathbb{R}^2$ の部分集合 S で定義された関数 $f : S \to \mathbb{R}$ を考える．$x = x_0$ のまわり I で定義された関数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ であって

$$\forall x \in I, (x, \varphi(x)) \in S \text{ かつ } f(x, \varphi(x)) = 0$$

なるものを，$(x_0, \varphi(x_0))$ を通る $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数（の一つ）という（普通は「φ は連続」などの「良い条件」が課される).

陰関数定理：

$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された C^1 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を考える．$(a, b) \in U$ が，条件

- $f(a, b) = 0$
- $\partial_2 f(a, b) \neq 0$

を満たすとき，(a, b) を通る $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数が存在する．より正確に言うと，ある $\delta > 0$ が存在して，次が成り立つ：

1. 以下を満たす連続関数 $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ がただ一つ存在する：
   - $\forall x \in (a - \delta, a + \delta), (x, \varphi(x)) \in U,$
   - $\forall x \in (a - \delta, a + \delta), f(x, \varphi(x)) = 0,$
   - $\varphi(a) = b.$
2. さらに φ は C^1 級で，微分係数について以下が成り立つ

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta), \varphi'(x) = -\partial_1 f(x, \varphi(x)) / \partial_2 f(x, \varphi(x)).$$

2 ラグランジュ未定乗数法

極大：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f: U \to \mathbb{R}$ を考える．$\boldsymbol{a} \in U$ で f が極大（点）であるとは

$$\exists r > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}; r), f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x}).$$

（注）$U(\boldsymbol{a}; r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < r\}$ は，中心 $\boldsymbol{a}$ で半径 r の開円盤である．極小も同様に定義される．極大・極小になる点を極値（点）とよぶ．

極値の候補：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f: U \to \mathbb{R}$ について，$\boldsymbol{a} \in U$ が f の極値点になっているとする．$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$ が存在するならば，$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．

条件付き極大：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f: U \to \mathbb{R}$ を考え，さらに束縛条件を与える $g: U \to \mathbb{R}$ も考える．$\boldsymbol{a} \in U$ が束縛条件 $g = 0$ での極大（点）であるとは（$g(\boldsymbol{a}) = 0$ かつ）

$$\exists r > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}; r), (g(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})).$$

ラグランジュ未定乗数法：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f, g: U \to \mathbb{R}$ について，

- f は全微分可能
- g は C^1 級

と仮定する（面倒なので，両方とも C^1 級とされることが多い）．さらに

- $\boldsymbol{a} \in U$ が束縛条件 $g = 0$ での極値
- $\operatorname{grad} g(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$

ならば，$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a})$

（注）束縛条件下で極値を求めようとするならば，$g(x, y) = 0$ から x または y を消去して，問題を「小さく」しようとするのが自然な考えである．しかしラグランジュ未定乗数法では，いったん変数 λ を足して，問題を難しくしているような見かけで興味深い．λ はラグランジュ未定乗数（Lagrange multiplier）とよばれる．

3　練習問題

(A1) 次の関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ について，$f(x,y)=0$ は与えられた (a,b) を通り $f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつことを示し，$\varphi'(a)$ を求めよ．

1. $f(x,y)=x^2+xy-y^2+x,\ (a,b)=(1,2)$
2. $f(x,y)=y+\cos(xy),\ (a,b)=(\pi,1)$
3. $f(x,y)=xe^{xy}-x^2,\ (a,b)=(1,0)$

(A2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto y^5+16y-32x^3+32x$ について，

1. $\forall x\in\mathbb{R},\exists! y\in\mathbb{R},f(x,y)=0$ を示せ．これで陰関数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},x\mapsto y$ が定まる．
2. φ は C^1 級であることを示し，$\varphi'(x)=0$ となる x を求めよ．

(A3) $\mathbb{R}^2$ の点 (x,y) が円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くとき，

1. xy の極値を求めよ．
2. $x+y$ の極値を求めよ．

(A4) 束縛条件 $ax+by=k$ のもとで，x^2+y^2 の最小値を求めたい（ここで $(a,b)\neq(0,0),k\neq 0$）．

1. とりあえずラグランジュの未定乗数法を適用してみよ．
2. それが本当に最小値であるかどうか考察せよ．

(A5)

1. 以下の証明の誤りを指摘せよ：

   1 は最大の自然数である．実際，最大の自然数を M とすると，$M\geq 1$ だが（$\because 1$ は自然数），M^2 も自然数なので $M\geq M^2$ が従う．よって $1\geq M$ である．■

2. 周長が一定の三角形のうち，面積が最大になるものは正三角形であることを示したい（注：このような三角形が存在することは自明ではない）．とりあえずラグランジュの未定乗数法を試みよ．

(A6) この問題の目的は，陰関数定理における C^1 級の仮定が外せないことを明らかにすることである．$0<\alpha<1$ を固定して，$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}\alpha y+y^2\sin(1/y)-x & (y\neq 0)\\ -x & (y=0)\end{cases}$$

を考える．このとき以下が成り立つ（と思うのですが，わかりませんでした．どなたか解いて教えてください．それなりに難しいと思います．別の f を提示するのでも OK です）：

1. f は C^1 級でないが全微分可能で $f(0,0)=0,\partial_2 f(0,0)=\alpha$.（これらはやさしい）
2. 以下は不成立：$\exists\delta>0,\exists!$連続関数$\varphi:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R},\forall x,f(x,\varphi(x))=0$ かつ $\varphi(0)=0$.
（追記：$\exists!$ は $\exists$ に変えてもやはり不成立のまま）

(A1) 1. f は C^∞ 級で $f(1,2)=0, \partial_2 f(1,2)=-3$ なので陰関数定理が使える．$\varphi'(a)=-\partial_1 f(a,b)/\partial_2 f(a,b)=5/3$

2. 上と同様である．$\varphi'(a)=-\partial_1 f(a,b)/\partial_2 f(a,b)=0.$

3. 上と同様である．$\varphi'(a)=-\partial_1 f(a,b)/\partial_2 f(a,b)=1.$

(A2) 1. 固定された x について，$g(y)=f(x,y)$ とすると，$\lim_{y\to\pm\infty} g(y)=\pm\infty$ で（$g(y)$ の主要項が y^5 だから．厳密な証明はお任せします）．よって中間値の定理より $\exists y\in\mathbb{R}, g(y)=0(=f(x,y)$ だが，$g'(y)=5y^4+16>0$ より g は狭義単調増加関数なので，この y はただ 1 つである．

2. $\partial_2 f(x,y)=5y^4+16\neq 0$ より，任意の $x\in\mathbb{R}$ について $(x,\varphi(x))$ を通り $f=0$ で定まる C^1 級の陰関数 ϕ が存在する．1 より，ϕ は φ の制限である．よって φ は C^1 級で，$\varphi'(x)=\phi'(x)=-\partial_1 f(x,y)/\partial_2(x,y)=(96x^2-32)/(5y^4+16)$（ここで $y=\varphi(x)$）．よって $x=\pm 1/\sqrt{3}$ で $\varphi'(x)=0$ となる．

(A3) $g(x,y)=x^2+y^2-1$ とすると，$g=0$ では $\operatorname{grad} g=(2x,2y)\neq\mathbf{0}$ であることに注意する．

1. $f(x,y)=xy$ とする．連立方程式 $g(x,y)=0, \operatorname{grad} f=\lambda \operatorname{grad} g$ を解く．すなわち $x^2+y^2-1=0, y=2\lambda x, x=2\lambda y$．これより $\lambda=\pm 1/2$ で $(x,y)=(\varepsilon_1/\sqrt{2},\varepsilon_2/\sqrt{2})$ と求まる（$\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{1,-1\}$）．これらが本当に極値であることの考察はお任せします．

2. $f(x,y)=x+y$ とする．連立方程式 $g(x,y)=0, \operatorname{grad} f=\lambda \operatorname{grad} g$ を解く．すなわち $x^2+y^2-1=0, 1=2\lambda x, 1=2\lambda y$．これより $\lambda=\pm 1/\sqrt{2}$ で $(x,y)=\pm(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ と求まる．これらが本当に極値であることの考察はお任せします．

(A4) 1. $f(x,y)=x^2+y^2, g(x,y)=ax+by-k$ とし，連立方程式 $g(x,y)=0, \operatorname{grad} f=\lambda \operatorname{grad} g$ を解く．すなわち $ax+by=k, 2x=a\lambda, 2y=b\lambda$．よって $x=a\lambda/2, y=b\lambda/2$．ゆえに $\lambda=2k/(a^2+b^2)$ なので $x=ak/(a^2+b^2), y=bk/(a^2+b^2)$．これから $x^2+y^2=k^2/(a^2+b^2)$ が最小値の候補としてもとまった．

2. 「求めるものは直線 $ax+by=k$ へ原点 $(0,0)$ から下した垂線の長さの 2 乗である」と解釈すれば，厳密ではないかもしれませんが図形的に考察可能です（他の方法もあるでしょう）．

(A5) 1. 「最大の自然数 M」の存在を仮定して証明しているが，この仮定は正しくない．

2. 周長を s とする．三角形の 3 辺の長さを x,y,z とすると，$x+y+z=s$ という束縛条件のもと（本当はさらに $0<x,y,z<s$），$S^2/s=(s-x)(s-y)(s-z)$（S は三角形の面積でヘロンの公式を用いた）を最大化する問題と翻訳される．連立方程式

$$x+y+z=s,\quad -(s-y)(s-z)=\lambda,\quad -(s-x)(s-z)=\lambda,\quad -(s-x)(s-y)=\lambda$$

を解く．$x\neq s, y\neq s, z\neq s$ を仮定すると $x=y=z=s/3$（正三角形）が得られる．これが答えであることを示すには「有界閉集合上の連続関数には最大値が存在する」などのおまじないが必要になるでしょう（現段階ではおそらく不可能です）．