- 前半は S タームの復習（掃出し法による連立方程式の解法，行列式，対角化）をします．
- 後半はジョルダン標準形を扱います．
- 微積の演習と線形の演習は異なる科目で，別々に成績がつきます（担当は同じです）．
- 線形の演習の成績はレポートと試験による予定で（試験日は公式にはないので設定します），内容は授業と直接関係しない予定です（希望があればお題と共にリクエストしてください）．
- 出席は一応とりますが，「50 可の判定に使う可能性がある」くらいに考えてください．
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017a.html` にもあります．

1 S タームの復習

以下について，どうしてそうなるのかはいったん忘れて，計算できるようになってください．

- 任意の行列は，行基本変形で階段行列に変形できる（pivot の数が rank でした）
- 連立方程式は，対応する拡大係数行列を行基本変形し，えられる階段行列（に対応する連立方程式を）を逆に解く
- 行列式の定義と，行および列基本変形に基づく計算
- 正方行列の対角化可能性の判定法と，可能な場合の計算

$\boxed{1}$ 以下の行列の行列式を求めよ．

$$\text{(a)}.\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}.\ \begin{pmatrix} x & x & x & y \\ x & x & y & x \\ x & y & x & x \\ y & x & x & x \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ 以下の行列 A, B について，それぞれ対角化可能かどうか調べ，対角化可能な場合は $P^{-1}AP, Q^{-1}BQ$ が対角行列になるような可逆行列 P, Q を求めよ．

$$\text{(a)}.\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & -3 & -4 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}.\ B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 2 & 6 & 3 \\ -5 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

2 ジョルダン標準形 (以下 $M_n(\mathbb{F})$ を $\mathbb{F}$ 成分の $n \times n$ 行列の集合とし，$A \in M_n(\mathbb{F})$ とします)

今までごまかしてきましたが，行列には成分として考えている数体系として体 $\mathbb{F}$ が（暗黙に）指定されています（$\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ など）．次の仮定 $(*)$ を考えましょう．要するに

$$\det(\lambda E_n - A) = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{m_s} \tag{1}$$

となっているということです（$m_k \geq 1, \alpha_k \in \mathbb{F}$ で $1 \leq i \neq j \leq s$ なら $\alpha_i \neq \alpha_j$ かつ $m_1 + \cdots + m_s = n$）．また $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ならば，任意の A について $(*)$ は成立します（代数学の基本定理）．

$(*)$ 　　A の固有多項式 $\det(\lambda E_n - A)$ は，$\mathbb{F}[x]$ 中で 1 次式の積に分解される．

ジョルダン細胞：次の形の $n \times n$ 行列を，固有値 α のサイズ n のジョルダン細胞という．

$$J(\alpha; n) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & O \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \alpha \end{pmatrix}$$

つまり対角成分がすべて α で，その上の帯はすべて 1 で，それ以外は 0 になっている．

ジョルダン標準形（**JNF, Jordan normal form**）：$\mathbb{F}$ を体，$A \in M_n(\mathbb{F})$ は仮定 $(*)$ を満たすとする．このとき $\mathbb{F}$ 成分の可逆行列 P があって，$P^{-1}AP$ はジョルダン細胞を並べた形になる：

$$P^{-1}AP = \bigoplus_{u=1}^{t} J(\beta_u; n_u) := \begin{pmatrix} J(\beta_1; n_1) & & & \\ & J(\beta_2; n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\beta_t; n_t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

ジョルダン標準形の計算法：$n \leq 4$ の場合を演習では扱います．方法はさまざまあると思いますが，とりあえず以下の手順でやってみましょう．

1. A のジョルダン標準形 J を決定する
2. ねらった J から $P = (\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)}, \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_2}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{p}_1^{(t)}, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_t}^{(t)})$ は

$$\begin{array}{llll} A\boldsymbol{p}_1^{(1)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_1^{(1)}, & A\boldsymbol{p}_2^{(1)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_2^{(1)} + \boldsymbol{p}_1^{(1)}, & \cdots, & A\boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)} + \boldsymbol{p}_{n_1-1}^{(1)} \\ A\boldsymbol{p}_1^{(2)} = \beta_2 \boldsymbol{p}_1^{(2)}, & A\boldsymbol{p}_2^{(2)} = \beta_2 \boldsymbol{p}_2^{(2)} + \boldsymbol{p}_1^{(2)}, & \cdots, & A\boldsymbol{p}_{n_2}^{(2)} = \beta_2 \boldsymbol{p}_{n_2}^{(2)} + \boldsymbol{p}_{n_2-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A\boldsymbol{p}_1^{(t)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_1^{(t)}, & A\boldsymbol{p}_2^{(t)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_2^{(t)} + \boldsymbol{p}_1^{(t)}, & \cdots, & A\boldsymbol{p}_{n_t}^{(t)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_{n_t}^{(t)} + \boldsymbol{p}_{n_t-1}^{(t)} \end{array}$$

   をみたすとわかる．掃出し法で（= 連立方程式を解いて）これを求める．

ジョルダン標準形の（実践的な）推測方法：(Z) によって JNF を決めることができます（付録 1 を参照）．$n = 2, 3$ では (X) によって決めることができ，これが一番実用的ではないかと思います．

(W) A の各固有値 α_j について，少なくとも 1 つは細胞 $J(\alpha_j; k)$ が現れる（ (1) のとき $k \leq m_j$）

(X) A が対角行列 D に対角化可能な場合，D が A の JNF である．もう少し思い出すと，A が対角化可能な必要十分条件は，各固有値 α_j について

$$「A\boldsymbol{x} = \alpha_j \boldsymbol{x} \text{ の解の独立なパラメータの個数 } m'_j」 = m_j$$

となることだった．実は，

- 固有値 α_j の細胞 $J(\alpha_j;$何とか$)$ は合計で丁度 m'_j 個登場する．
- 「$\sum$ 固有値 α_j の細胞 $J(\alpha_j;$何とか$)$ のサイズ」$= m_j$

(Y) $\det(\lambda E_n - A) = \det(\lambda E_n - J)$

(Z) $\forall \gamma \in \mathbb{F}, \forall m \geq 0, \operatorname{rank}(A - \gamma E_n)^m = \operatorname{rank}(J - \gamma E_n)^m$

3　演習問題

(S1)　次の $A \in M_2(\mathbb{Q})$ について，JNF J と，$P^{-1}AP = J$ となる P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

(S2)　次の $B \in M_2(\mathbb{Q})$ について，JNF J と，$Q^{-1}BQ = J_B$ となる Q を求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(S3)　3×3 の行列の JNF の型は何通りありえるか列挙せよ（細胞の並び替えについては神経質にならなくてよい）．

(S4)　$A \in M_3(\mathbb{F})$ の固有多項式が $\det(\lambda E_3 - A) = (\lambda - \alpha)^3$ のとき，A の JNF の可能性を列挙せよ（細胞の並び替えについては神経質にならなくてよい）．

(S5)　次の A について，JNF J と，$P^{-1}AP = J$ となる P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 6 & 6 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

(S6)　$A \in M_8(\mathbb{F}), \det(\lambda E_8 - A) = \lambda^8, A^3 = O, A^2 \neq O$ のとき，A の JNF の可能性を列挙せよ（細胞の並び替えについては神経質にならなくてよい）．

（付録 1）ジョルダン標準形の一意性の証明：ジョルダン標準形は細胞の並び替えを除いて一意的である．これは (Z) より，(2) において，$J(\beta_j; k)$ の個数が以下で与えられるからである．

$$\operatorname{rank}(A - \beta_j E_n)^{k+1} + \operatorname{rank}(A - \beta_j E_n)^{k-1} - 2\operatorname{rank}(A - \beta_j E_n)^k$$

（付録 2）ジョルダン標準形の存在証明：ここでは線形代数の先にある代数学の知識も認めると，どんな感じで証明できるのか雰囲気をみてみましょう．

1. $V = \mathbb{F}^n$ は $x\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}$ とすることで $\mathbb{F}[x]$ 加群になる．$(n =) \dim_{\mathbb{F}} V < \infty$ なので，V は有限生成 $\mathbb{F}[x]$ 加群だが，$\mathbb{F}[x]$ はネーター環なので，V は有限表示 $\mathbb{F}[x]$ 加群である．よって適当な $\mathbb{F}[x]$ 成分 $a \times b$ 行列 M が存在して，以下の $\mathbb{F}[x]$ 加群同型が成り立つ

$$V \cong \operatorname{Coker}(M) := \operatorname{Coker}(\mathbb{F}[x]^b \to \mathbb{F}[x]^a, \boldsymbol{f} \mapsto M\boldsymbol{f}).$$

2. $\mathbb{F}[x]$ は PID（単項イデアル整域）なので，スミス標準形（単因子標準形）がとれる．

$$PMQ = D = \begin{pmatrix} f_1(x) & & & O \\ & \ddots & & \\ & & f_r(x) & \\ O & & & O \end{pmatrix}$$

ここで P,Q は $\det P, \det Q \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ となる $\mathbb{F}[x]$ 成分の $a\times a, b\times b$ 行列である（これは $\exists R\in M_a(\mathbb{F}[x]), PR=RP=E_a, \exists S\in M_b(\mathbb{F}[x]), QS=SQ=E_b$ と同値である．このような P,Q はユニモジュラー行列ともよばれる）．$f_1,\cdots,f_r$ は「最高次の係数が 1 の多項式で $f_i(x)$ は $f_{i+1}(x)$ を割り切る（$1\le i<r$）」という条件で M から一意的に定まる．

3. $f(x)=x^m+\sum_{i=1}^m a_i x^{m-i}\in\mathbb{F}[x]$ について，行列 $C(f(x))\in M_m(\mathbb{F})$ を

$$C(f(x))=\begin{pmatrix} 0 & & O & -a_m \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_2 \\ O & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

と定義する（$m\ge 2$ のとき．$m=1$ のときは $C(f(x))=(-a_1)$ であり，$m=0\Leftrightarrow f(x)=1$ のときは $C(f(x))$ は 0×0 行列と思う）．$\det(xE_m-C(f(x)))=f(x)$ となることは難しくない（演習問題のレベル）．$C(f(x))$ は $f(x)$ のフロベニウス同伴行列とよばれる．

4. $\mathrm{Coker}(M)\cong\mathrm{Coker}(D)\cong\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{F}[x]/\langle f_i(x)\rangle\bigoplus\mathbb{F}[x]^{\oplus(a-r)}$ だが，$\dim_{\mathbb{F}}V<\infty$ より $a=r$．よって $\mathbb{F}[x]$ 加群として $V\cong\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{F}[x]/\langle f_i(x)\rangle$ なので，ある $R\in GL_n(\mathbb{F})$ が存在して

$$R^{-1}AR=\bigoplus_{i=1}^r C(f_i(x))$$

となる．両辺の固有多項式をとると，仮定 $(*)$ と $\mathbb{F}[x]$ が UFD（一意分解整域）であることより，各 $f_i(x)$ も実は $\mathbb{F}[x]$ 中で 1 次式の積に分解されていることがわかる．以上より $f(x)=(\lambda-\gamma_1)^{\delta_1}\cdots(\lambda-\gamma_u)^{\delta_u}$ の形（ここで $u\ge 0, \delta_j\ge 1, 1\le j\ne k\le u\Rightarrow\gamma_j\ne\gamma_k$）について $\mathbb{F}[x]/\langle f(x)\rangle$ を考察すればよい．さらに CRT（中国剰余定理）を適用すると

$$\mathbb{F}[x]/\langle f(x)\rangle\cong\bigoplus_{j=1}^u\mathbb{F}[x]/\langle(\lambda-\gamma_j)^{\delta_j}\rangle$$

なので，$f(x)=(x-\alpha)^m$ の場合に帰着される

5. $W:=\mathbb{F}[x]/\langle f(x)\rangle=\mathbb{F}[x]/\langle(x-\alpha)^m\rangle$ は，基底

$$\{(x-\alpha)^k+\langle(x-\alpha)^m\rangle \mid 0\le k<m\}$$

をもつが，これについての $x-\alpha$ の行列表示は $J(0;m)$ である．よってこの基底に関する x の行列表示は $J(\alpha;m)$ となる．以上より x の行列表示がジョルダン細胞の直和になるような V の基底が存在する

注：2 は既習のランク標準形の一般化になっています．ランク標準形とは，以下でした：

$$\forall M:\mathbb{F}\text{ 成分 } a\times b \text{ 行列}, 0\le\exists r\le\min(a,b), \exists P\in GL_a(\mathbb{F}), \exists Q\in GL_b(\mathbb{F}), PMQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

2 は行・列基本変形とユークリッドの互除法の組合せで，P,Q を具体的に求めるアルゴリズムが存在します（ランク標準形は行・列基本変形のみで P,Q が求まるのでした）．