- 前半は極値判定法を，中半はコーシー列を，後半は積分の定義を扱います．
- 微積の演習と線形の演習は異なる科目で，別々に成績がつきます（担当は同じです）．
- 微積の演習の成績はレポートと試験による予定で（試験日は公式にはないので設定します），内容は授業のフォローの予定です（希望があればお題と共にリクエストしてください）．
- 出席は一応とりますが，「50 可の判定に使う可能性がある」くらいに考えてください．
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017a.html` にもあります．

1　極値判定法

極大：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f: U \to \mathbb{R}$ を考える．$\boldsymbol{a} \in U$ で f が極大（点）であるとは

$$\exists r > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}; r), f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x}).$$

（注）$U(\boldsymbol{a}; r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < r\}$ は，中心 $\boldsymbol{a}$ で半径 r の開円盤である．極小も同様に定義される．狭義の極大・極小も定義される．極大・極小になる点を極値（点）とよぶ．

極値の候補：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f: U \to \mathbb{R}$ について，$\boldsymbol{a} \in U$ が f の極値点になっているとする．$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$ が存在するならば，$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．

（注）$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{a}$ を f の停留点という．微分可能性に関する条件を無視すれば，上の結果は「極値点は停留点である」といっている．

極値判定法：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された C^2 級関数 $f: U \to \mathbb{R}$ がある $\boldsymbol{a} \in U$ について $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = 0$ であるとする．

$$\Delta := \partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) \cdot \partial_y^2 f(\boldsymbol{a}) - (\partial_x \partial_y f(\boldsymbol{a}))^2$$

と定義すると，以下が成り立つ．

1. $\Delta < 0$ ならば $\boldsymbol{a}$ は極値点ではない．
2. $\Delta > 0$ のとき（このとき $\partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) \neq 0$ に注意しよう）
   (a) $\partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) > 0$ ならば $\boldsymbol{a}$ は f の狭義の極小点である．
   (b) $\partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) < 0$ ならば $\boldsymbol{a}$ は f の狭義の極大点である．

（注）$\Delta = 0$ のときは $\boldsymbol{a}$ が極値点かどうかはこれだけでは判定できない．

（注）2 はヘッセ行列

$$\begin{pmatrix} \partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) & \partial_x \partial_y f(\boldsymbol{a}) \\ \partial_x \partial_y f(\boldsymbol{a}) & \partial_y^2 f(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

の固有値が同符号（(a) は共に正，(b) は共に負）の場合に対応する．

2　演習問題

(A1)　次の関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の停留点をすべて求め，極値判定を行え．

1. $f(x,y)=x^3+y^3-9xy$
2. $f(x,y)=x^2-y^3$
3. $f(x,y)=y^2+2x^2y-x^4$

(A2)　$f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(ax^2+by^2)$ の極値を求めよ．ただし $a\geq b>0$ とする．

3　コーシー列

上界：$a\in\mathbb{R}$ が，$A\subseteq\mathbb{R}$ の上界であるとは，$\forall x\in A, x\leq a$ であることをいう．

上に有界：$A\subseteq\mathbb{R}$ は上界が存在するとき，上に有界とよばれる．

上限：$A\subseteq\mathbb{R}$ の最小上界を上限とよび $\sup A$ と書く（存在するならば）．$a=\sup A$ は，以下の 2 つが成り立つことと同値である．

1. $\forall x\in A, x\leq a$
2. $\forall\varepsilon>0, \exists x\in A, a-\varepsilon<x$

実数の連続性：空でない上に有界な部分集合 $A\subseteq\mathbb{R}$ について上限 $\sup A$ が存在する．

実数の完備性：任意のコーシー列は収束する．ここで実数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ がコーシー列とは

$$\forall\varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \forall m\in\mathbb{N}, n>N, m>N \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon.$$

4　演習問題

(B1)　数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ がコーシー列でないことを ε-N 論法で書き下せ．

(B2)　$a_n=1/n$ で定まる数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ がコーシー列であることを示せ．

(B3)　$a_n=1+1/2+\cdots+1/n$ で定まる数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ がコーシー列かどうか調べよ．

(B4)　数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ は，任意の $k\geq 1$ について $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$ となるという．このとき $\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在するかどうか調べよ．

(B5)　数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ について，$s_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k$ が収束するとき $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は条件収束するといい，$t_n:=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ が収束するとき $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は絶対収束するという．

1. $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ が条件収束するとき，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ．

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が条件収束するが，絶対収束しないような数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ の例を挙げよ．
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束するならば，条件収束することを示せ．
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は絶対収束することを示せ．
5. $(a_n)_{n\geq 1}$ が広義単調減少数列で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ は条件収束することを示せ．

5　リーマン積分の定義 （以下 $a < b$ とする）

分割：$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ を $[a, b]$ の分割という．

分割の幅：$\Delta = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ の幅 $|\Delta|$ を以下で定義する．

$$|\Delta| := \max\{x_j - x_{j-1} \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

リーマン積分：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が区間 $[a, b]$ でリーマン積分可能であるとは

$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n) : [a, b]$ の分割,

$$|\Delta| < \delta \Rightarrow \forall (\xi_j)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n [x_{j-1}, x_k], \left|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - A\right| < \varepsilon$$

と定義され，このとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = A$ と書く．

（注）上で A は存在するなら一意的である（あたりまえ）．

（注）リーマン積分可能性は上のようにリーマン和の収束で定義する version と，以下のように上積分・下積分を用いて $s(f) = S(f)$ となるとき，リーマン可積分と定義する version とがある．非自明な事実だが，有界関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ について 2 つの可積分性の定義は同値である．

過剰和・不足和：有界な関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ と分割 $\Delta = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ について，

$$m_j := \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x), \quad M_j := \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

とおき（実数の連続性より $m_j, M_j \in \mathbb{R}$），過剰和 $U_\Delta(f)$ と不足和 $L_\Delta(f)$ を以下で定義する．

$$U_\Delta(f) := \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \quad L_\Delta(f) := \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}).$$

下積分・上積分：$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ の下積分と上積分を以下で定義する．

$$s(f) = \sup\{L_\Delta(f) \mid \Delta : [a, b] \text{ の分割 }\}, \quad S(f) = \inf\{U_\Delta(f) \mid \Delta : [a, b] \text{ の分割 }\}.$$

6　演習問題

(C1)　以下の関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は $[0,1]$ でリーマン積分不可能であることを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

(C2)　関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ がリーマン積分可能ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{j(b-a)}{n}\right)$$

が存在して，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に等しいことを示せ．

(C3)　関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ が $[0,1]$ でリーマン積分可能かどうか調べ，可能な場合は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ．

(C4)　（おまけ）x の 2 進法展開を 10 進法に解釈したものを $f(x)$ とすることで定まる関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を考える．例えば $x = 0.5$ は 2 進法で 0.1 なので $f(x) = 0.1$ である．また $0.1 = 0.01111\cdots$ のような 2 通りの表示では有限のほうを採用すると約束している．f が $[0,1]$ でリーマン積分可能かどうか調べ，可能な場合は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ．