- 前半はジョルダン標準形の計算方法，後半は標準形の応用を扱います．
- 次回はジョルダン標準形の応用の続きから始めるつもりです．
- 演習で扱ってほしいことがあればリクエストをお願いします（web からも匿名で送れるし，演習中に「質問箱」にこっそり投函してもらってもよいです）．
- 一応，今のままだと，内積，対称行列，エルミート行列，体，線形空間，基底，線形写像，線形写像の行列表示などを扱おうかなと考えています．

1　前回の復習

(A1)　次の $A \in M_2(\mathbb{Q})$ について，JNF J は何になるか？
1. A の固有多項式は $(\lambda-2)^2$，$A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ の解 $\boldsymbol{v}$ はパラメータ 2 つで表される
2. A の固有多項式は $(\lambda-2)^2$，$A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ の解 $\boldsymbol{v}$ はパラメータ 1 つで表される
3. A の固有多項式は $(\lambda-2)(\lambda-3)$

(A2)　次の $A \in M_3(\mathbb{Q})$ について，JNF J は何になるか？
1. A の固有多項式は $(\lambda-2)^3$，$A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ の解 $\boldsymbol{v}$ はパラメータ 3 つで表される
2. A の固有多項式は $(\lambda-2)^3$，$A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ の解 $\boldsymbol{v}$ はパラメータ 2 つで表される
3. A の固有多項式は $(\lambda-2)^3$，$A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ の解 $\boldsymbol{v}$ はパラメータ 1 つで表される
4. A の固有多項式は $(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

(A3)　次の $A \in M_4(\mathbb{Q})$ について，JNF J は何になるか？
1. A の固有多項式は $(\lambda-2)^4$，$A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ の解 $\boldsymbol{v}$ はパラメータ 3 つで表される
2. A の固有多項式は $(\lambda-2)^4$，$A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ の解 $\boldsymbol{v}$ はパラメータ 2 つで表される

$\mathbb{F}$ を体，$M_n(\mathbb{F})$ を $\mathbb{F}$ 成分の $n \times n$ 行列の集合とする．$A \in M_n(\mathbb{F})$ について以下の仮定を考える．

$(*)$　　A の固有多項式 $\det(\lambda E_n - A)$ は，$\mathbb{F}[x]$ 中で 1 次式の積に分解される．

要するに

$$\det(\lambda E_n - A) = (\lambda-\alpha_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\alpha_s)^{m_s} \tag{1}$$

となっているということである（$m_k \geq 1, \alpha_k \in \mathbb{F}$ で $1 \leq i \neq j \leq s$ なら $\alpha_i \neq \alpha_j$ かつ $m_1+\cdots+m_s=n$）．

ジョルダン細胞：次の形の $n \times n$ 行列を，固有値 α のサイズ n のジョルダン細胞という．

$$J(\alpha;n) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & O \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \alpha \end{pmatrix}$$

つまり対角成分がすべて α で，その上の帯はすべて 1 で，それ以外は 0 になっている．

ジョルダン標準形（JNF, Jordan normal form）：$\mathbb{F}$ を体，$A \in M_n(\mathbb{F})$ は仮定 $(*)$ を満たすとする．このとき $\mathbb{F}$ 成分の可逆行列 P があって，$P^{-1}AP$ はジョルダン細胞を並べた形になる：

$$P^{-1}AP = \bigoplus_{u=1}^{t} J(\beta_u; n_u) := \begin{pmatrix} J(\beta_1; n_1) & & & \\ & J(\beta_2; n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\beta_t; n_t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

ジョルダン標準形の推測方法：(Z) によって JNF を決めることができる．$n = 2, 3$ では (X) によって決めることもできる．

(W) A の各固有値 α_j について，少なくとも 1 つは細胞 $J(\alpha_j; k)$ が現れる（ (1) のとき $k \leq m_j$）

(X) A が対角行列 D に対角化可能な場合，D が A の JNF である．もう少し思い出すと，A が対角化可能な必要十分条件は，各固有値 α_j について

$$「A\boldsymbol{x} = \alpha_j \boldsymbol{x} \text{ の解の独立なパラメータの個数 } m'_j」 = m_j$$

となることだった．実は，
- 固有値 α_j の細胞 $J(\alpha_j;$何とか$)$ は合計で丁度 m'_j 個登場する．
- 「$\sum$ 固有値 α_j の細胞 $J(\alpha_j;$何とか$)$ のサイズ」$= m_j$

(Y) $\det(\lambda E_n - A) = \det(\lambda E_n - J)$

(Z) $\forall \gamma \in \mathbb{F}, \forall m \geq 0, \operatorname{rank}(A - \gamma E_n)^m = \operatorname{rank}(J - \gamma E_n)^m$

2　ジョルダン標準形の計算法

$n \leq 4$ の場合を演習では扱います（今日は $n = 2, 3$ の場合）．方法はさまざまあると思いますが，とりあえず以下の手順でやってみましょう．

1. A のジョルダン標準形 J を決定する
2. ねらった J から $P = (\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)}, \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_2}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{p}_1^{(t)}, \cdots, \boldsymbol{p}_{n_t}^{(t)})$ は

$$\begin{array}{cccc} A\boldsymbol{p}_1^{(1)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_1^{(1)}, & A\boldsymbol{p}_2^{(1)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_2^{(1)} + \boldsymbol{p}_1^{(1)}, & \cdots, & A\boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_{n_1}^{(1)} + \boldsymbol{p}_{n_1-1}^{(1)} \\ A\boldsymbol{p}_1^{(2)} = \beta_2 \boldsymbol{p}_1^{(2)}, & A\boldsymbol{p}_2^{(2)} = \beta_2 \boldsymbol{p}_2^{(2)} + \boldsymbol{p}_1^{(2)}, & \cdots, & A\boldsymbol{p}_{n_2}^{(2)} = \beta_2 \boldsymbol{p}_{n_2}^{(2)} + \boldsymbol{p}_{n_2-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A\boldsymbol{p}_1^{(t)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_1^{(t)}, & A\boldsymbol{p}_2^{(t)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_2^{(t)} + \boldsymbol{p}_1^{(t)}, & \cdots, & A\boldsymbol{p}_{n_t}^{(t)} = \beta_1 \boldsymbol{p}_{n_t}^{(t)} + \boldsymbol{p}_{n_t-1}^{(t)} \end{array}$$

をみたすとわかる．掃出し法で（= 連立方程式を解いて）これを求める．

3　演習問題

(B1)　次の $A \in M_2(\mathbb{Q})$ について，JNF J と，$P^{-1}AP = J$ となる P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

(B2)　次の $B \in M_2(\mathbb{Q})$ について，JNF J と，$Q^{-1}BQ = J_B$ となる Q を求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(B3)　次の $A \in M_3(\mathbb{Q})$ について，JNF J と，$P^{-1}AP = J$ となる P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(B4)　次の $B \in M_3(\mathbb{Q})$ について，JNF J と，$Q^{-1}BQ = J_B$ となる Q を求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4　何とか標準形についての復習

以下が与えられているとき，$x \in X$ について $y \sim x$ となる（普通は一意的に決まる）$y \in X$ が「何とか標準形」である．

1. 対象となる行列の集合 X
2. X 上の同値関係 $\sim$

ランク標準形：$X = M_{m,n}(\mathbb{F})$（$\mathbb{F}$ 成分の $m \times n$ 行列の集合）で

$$X \sim X' \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(\mathbb{F}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{F}), PXQ = X'$$

なる同値関係を考える．この標準形がランク標準形である．すなわち

$$\forall M \in M_{m,n}(\mathbb{F}), 0 \leq \exists! r \leq \min(a,b), \exists P \in GL_a(\mathbb{F}), \exists Q \in GL_b(\mathbb{F}), PMQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

（注）ここで $GL_n(\mathbb{F})$ とは，$\mathbb{F}$ 成分の可逆 $n \times n$ 行列の集合である．すなわち

$$GL_n(\mathbb{F}) = \{M \in M_n(\mathbb{F}) \mid \det M \neq 0\}$$

ジョルダン標準形：$X = \{M \in M_{n,}(\mathbb{F}) \mid M$ は仮定 $(*)$ を満たす $\}$ で

$$X \sim X' \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{F}), P^{-1}XP = X'$$

なる同値関係を考える．これの標準形がジョルダン標準形である（細胞の並び替えについてはごまかしている）．

被約行階段行列：$X = M_{m,n}(\mathbb{F})$ で

$$X \sim X' \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(\mathbb{F}), PX = X'$$

なる同値関係を考える．これの標準形が被約行階段行列である（行階段行列は X からは一意的に定まらず，pivot の数 $= \mathrm{rank}(X)$ が決まるだけである．ただし被約行階段行列は X から一意的に定まり，このことは共通資料 14 章にも書いてあります）．

（注）他にもフロベニウス標準形（有理標準形）などいろいろあります．

5　演習問題

「何とか標準形」に帰着できる問題であれば，標準形についてのみ問題を解けばよく，簡単になります．（ただし「牛刀で鶏を割く」になっていることも多いので注意しましょう．とく，それで示しても実際には循環論法になっている可能性もあります）．

以下のうち，JNF への帰着が有効な問題を解け．

(C1)　$A \in M_{m,n}(\mathbb{Q}), B \in M_{n,\ell}(\mathbb{Q})$ について，以下の不等式が成り立つ．

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n \leq \mathrm{rank}(AB) \leq \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$$

(C2)　A, B, C を行列積 ABC が定義できるような $\mathbb{Q}$ 成分の行列とする．以下の不等式が成り立つ．

$$\mathrm{rank}(ABC) + \mathrm{rank}(B) \geq \mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC)$$

(C3)　$A \in M_n(\mathbb{Q})$ が $m > n$ について $A^m = O$ ならば $A^n = O$ が成り立つ．

(C4)　複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ が $|\alpha| < 1$ ならば $\lim_{m\to\infty} \alpha^m = 0$ である（あたりまえ）．$A \in M_n(\mathbb{C})$ について，以下が成り立つ．

$$\forall\alpha : A \text{ の固有値}, |\alpha| < 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} A^m = O$$