- 今回は標準形の応用を扱います.
- 出席は一応とりますが,「50 可の判定に使う可能性がある」くらいに考えてください.
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017a.html` にもあります.

1 前回の復習

(A1) 次の $A \in M_3(\mathbb{Q})$ について，JNF J と，$P^{-1}AP = J$ となる P を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(A2) 次の $A \in M_3(\mathbb{Q})$ について，JNF J と，$P^{-1}AP = J$ となる P を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2 ジョルダン標準形の応用

A の JNF を J とする．JNF の応用として典型的なものは A^n を J から知ることによる.

べきを求める原理：$P^{-1}AP = J$ のとき $A^m = PJ^mP^{-1}$（あたりまえ）

Jordan 細胞のべき：帰納法で以下が示せる.

$$J(\alpha; n)^m = \begin{pmatrix} \alpha^m & \binom{m}{1}\alpha^{m-1} & \binom{m}{2}\alpha^{m-2} & \cdots \\ & \alpha^m & \binom{m}{1}\alpha^{m-1} & \ddots \\ & & \ddots & \binom{m}{1}\alpha^{m-1} \\ O & & & \alpha^m \end{pmatrix}.$$

漸化式への応用：フィボナッチ数列のような漸化式を解くことができる．例えば $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ であれば（p, q は定数）

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

なので，$\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ を求めることから a_n の一般項が求まる.

行列の $\exp$：$x \in \mathbb{C}$ について，$\exp x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ である．行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ について

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = E_n + A + \frac{1}{2} A^2 + \cdots$$

と定義される．$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$ なので，$\exp A$ の計算は $\exp J$ に帰着される．

微分方程式への応用：$dx/dt = ax$ の一般解は $x(t) = C \exp at$ であった（C は任意定数）．$d\boldsymbol{x}/dt = A\boldsymbol{x}$ の一般解は $\boldsymbol{x} = (\exp tA)\boldsymbol{c}$ である．ここで $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は適当な滑らかさを仮定した関数で，$A \in M_n(\mathbb{C})$ は与えられた行列，$\boldsymbol{c}$ は任意定ベクトルである．

3　演習問題

(B1)　次の $A \in M_3(\mathbb{Q})$ について，A^n を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(B2)　初期条件 $a_0 = 3, b_0 = 2, c_0 = 0$ と以下の漸化式で定まる数列 $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ を求めよ（東大工学部の平成 14 年度院試より）．

$$\begin{cases} a_{n+1} & = 4b_n + 5c_n \\ b_{n+1} & = -2a_n + 3b_n + 2c_n \\ c_{n+1} & = 2b_n + 4c_n \end{cases}$$

(B3)　$A = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ について，$A = X^2$ なる X をすべて求めよ．

(B4)　次の $A \in M_3(\mathbb{C})$ について，$\exp A$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(B5)　以下の微分方程式の一般解を求めよ（x, y, z は t の関数）．

$$\begin{cases} x' & = x + 3y - 2z \\ y' & = -x + 3y \\ z' & = -x + 3z \end{cases}$$

4　何とか標準形についての復習

以下が与えられているとき，$x \in X$ について $y \sim x$ となる（普通は一意的に決まる）$y \in X$ が「何とか標準形」である．

1. 対象となる行列の集合 X
2. X 上の同値関係 $\sim$

ランク標準形：$X = M_{m,n}(\mathbb{F})$（$\mathbb{F}$ 成分の $m \times n$ 行列の集合）で

$$X \sim X' \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(\mathbb{F}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{F}), PXQ = X'$$

なる同値関係を考える．この標準形がランク標準形である．すなわち

$$\forall M \in M_{m,n}(\mathbb{F}), 0 \leq \exists! r \leq \min(a,b), \exists P \in GL_a(\mathbb{F}), \exists Q \in GL_b(\mathbb{F}), PMQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

（注）ここで $GL_n(\mathbb{F})$ とは，$\mathbb{F}$ 成分の可逆 $n \times n$ 行列の集合である．すなわち

$$GL_n(\mathbb{F}) = \{M \in M_n(\mathbb{F}) \mid \det M \neq 0\}$$

ジョルダン標準形：$X = \{M \in M_{n,}(\mathbb{F}) \mid M$ は仮定 $(*)$ を満たす $\}$ で

$$X \sim X' \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{F}), P^{-1}XP = X'$$

なる同値関係（**相似** (similar) または**共役** (conjugate) とよばれる）を考える．これの標準形がジョルダン標準形である（細胞の並び替えについてはごまかしている）．

被約行階段行列：$X = M_{m,n}(\mathbb{F})$ で

$$X \sim X' \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(\mathbb{F}), PX = X'$$

なる同値関係を考える．これの標準形が被約行階段行列である（行階段行列は X からは一意的に定まらず，pivot の数 $= \mathrm{rank}(X)$ が決まるだけである．ただし被約行階段行列は X から一意的に定まり，このことは共通資料 14 章にも書いてあります）．

（注）他にもフロベニウス標準形（有理標準形）などいろいろあります．

（注）「何とか標準形」に帰着できる問題であれば，標準形についてのみ問題を解けばよく，簡単になります．（ただし「牛刀で鶏を割く」になっていることも多いので注意しましょう．特に，それで示しても実際には循環論法になっている可能性もあります）．

5　演習問題

(C1)　$A \in M_n(\mathbb{C})$ が $m > n$ について $A^m = O$ ならば $A^n = O$ が成り立つことを示せ．

(C2)　複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ が $|\alpha| < 1$ ならば $\lim_{m\to\infty} \alpha^m = 0$ である（あたりまえ）．
$A \in M_n(\mathbb{C})$ について，以下を示せ．

$$\forall \alpha : A\text{ の固有値}, |\alpha| < 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} A^m = O$$

(C3)　$A \in M_n(\mathbb{C})$ が

1. $\exists m, A^m = E_n$ であれば A は対角化可能であることを示せ．
2. $A \neq O, \exists m \geq 2, A^m = O$ であれば A は対角化不可能であることを示せ．

(C4)　$A \in M_n(\mathbb{C})$ について，

$$C_A = \{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$$

を A の交換団とよぶ．A の多項式たちは C_A の元である（あたりまえ）．すなわち

$$\bigcup_{m\geq 0} \{a_0E_n + a_1A + \cdots + a_mA^m \mid (a_i)_{i=0}^m \in \mathbb{C}^{m+1}\} \subseteq C_A$$

1. $\forall k \in \mathbb{C}, A \neq kE_n$ であって，さらに上の $\subseteq$ が $\subsetneq$ になるような例を挙げよ．
2. 上の $\subseteq$ が $=$ になる A の必要十分条件を調べよ．

(C5)　以下の $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ に対して，A と B が相似となるような $x \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ（平成 26 年度京大理学系大学院入試より）．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}.$$