- 今日は広義積分，積分の計算，それらの応用を扱います．
- 出席は一応とりますが，「50 可の判定に使う可能性がある」くらいに考えてください．
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017a.html` にもあります．

1　広義積分

積分の定義の拡張：連続関数 $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ について

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

が存在するならば，この値を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と定める．$\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ なども同様に定義される．

絶対収束（その 1）：$f:(a,b]\to\mathbb{R}$ は連続とする．

1. $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も存在して $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.
2. $g:(a,b]\to\mathbb{R}$ も連続で $\forall x\in(a,b], |f(x)|\le g(x)$ とする．$\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も存在する．
3. $0<\exists\alpha<1, \exists M>0, \forall x\in(a,b], (x-a)^\alpha|f(x)|<M$ ならば $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ が存在する．

絶対収束（その 2）：$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続とする．

1. $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ も存在して $\displaystyle\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|dx$
2. $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ も連続で $\forall x\in[a,\infty), |f(x)|\le g(x)$ とする．$\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ も存在する．
3. $\exists\alpha>1, \exists M>0, \forall x\in[a,\infty), (x-a)^\alpha|f(x)|<M$ ならば $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$ が存在する．

コーシーの判定法（その 1）：連続関数 $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ について，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が存在するための必要十分条件は $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, a<\forall p<\forall q<\min(a+\delta,b), \displaystyle\left|\int_p^q f(x)dx\right|<\varepsilon$.

コーシーの判定法（その 2）：連続関数 $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ について，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が存在するための必要十分条件は $\forall\varepsilon>0, \exists M>0, M<\forall p<\forall q, \displaystyle\left|\int_p^q f(x)dx\right|<\varepsilon$.

2 演習問題

(A1) $\alpha > 0$ とする．

1. 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ の存在を調べよ．
2. 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ の存在を調べよ．

(A2) 有理関数 $P(x)/Q(x)$ の広義積分

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

が存在する必要十分条件は何か？（ここで $P(x), Q(x) \neq 0$ かつ $\forall x \geq 0, Q(x) \neq 0$ とする）

(A3) 連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定める（連続性は認めてよい）．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

1. $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|dx$ は存在しないことを示せ．
2. $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ が存在するかどうか調べよ．

(A4) 次の広義積分が収束する実数 p の範囲を求めよ（2017 年名大多元数理大学院試験より）．

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1-\cos x}{(x^2+1)x^p}dx$$

3 不定積分の計算法

置換積分：$\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

部分積分：$\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

部分分数展開：$P(x), Q(x)$ を共通因子を持たない多項式で $Q(x)$ は 1 次以上とする．割り算を

$$P(x) = Q(x)A(x) + B(x)$$

とすると（ここで $B(x) = 0$ または $\deg B(x) < \deg Q(x)$）

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$$

だが（あたりまえ），$\dfrac{B(x)}{Q(x)}$ は，以下の 2 つの形の有理式の和で表せる（$\alpha, \beta, a, b, c, d$ は定数で $c^2 - 4d < 0$．$\gamma, m \geq 1$ は自然数である）．

$$\frac{\alpha}{(x-\beta)^\gamma}, \quad \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m}$$

有理関数の積分（その 1）：

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^\gamma} = \begin{cases} \log|x-\beta| & (\gamma = 1) \\ -\dfrac{1}{(\gamma-1)(x-\beta)^{\gamma-1}} & (\gamma \neq 1) \end{cases}$$

有理関数の積分（その 2）：

$$\int \frac{xdx}{(x^2+b^2)^\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(x^2+b^2) & (\gamma = 1) \\ -\dfrac{1}{2(\gamma-1)(x^2+b^2)^{\gamma-1}} & (\gamma \neq 1) \end{cases}$$

有理関数の積分（その 3）：$I_m = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^m}$ は，漸化式

$$I_m = \frac{1}{2(m-1)b^2}\left(\frac{x}{(x^2+b^2)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}(x)\right)$$

と「初期条件」$I_1 = \dfrac{1}{b}\arctan\dfrac{x}{b}$ によって計算できる．

(注)：x^2+cx+d $(c^2-4d<0)$ は変数変換 $y = x+c/2$ を施すと y^2+b^2 の形になる $(b^2 = d-c^2/4)$

三角関数の積分：$R(p,q)$ が p,q の有理式ならば，$\tan\frac{x}{2} = t$ とおけば

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

無理式の積分（その 1）：$R(p,q)$ が p,q の有理式ならば，

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R(g(t),t)g'(t)dt$$

である（ただし $ad-bc \neq 0$）．ここで $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ とおけば

$$x = g(t) = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a}$$

無理式の積分（その 2）：$R(p,q)$ が p,q の有理式ならば，

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R(g(t), t-\sqrt{a}g(t))g'(t)dt$$

である（ただし $a>0$）．ここで $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおけば

$$x = g(t) = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$$

4　演習問題

(B1)　次の不定積分を求めよ．

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$
3. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

(B2)　次の不定積分を求めよ．

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^3)^2}$

(B3)　次の不定積分を求めよ．

1. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}dx$（ここで $a>0$）
2. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

(C1)

1. $\displaystyle J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ とすると $J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$ を示せ．
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1$ を示せ．
3. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$ を導け．

(C2)

1. $n \geq 1$ について $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx = J_{2n+1}$ を示せ．
2. $n \geq 1$ について $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = J_{2n-2}$ を示せ．
3. $x \geq 0$ ならば $1-x \leq e^{-x} \leq 1/(1+x)$ を示せ．
4. 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ を示せ．

(C3)　広義積分 $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)dx$ について考える．このとき以下の問に答えよ（九大数理学府 2013 年の大学院入試より）．

1. $0 \leq x \leq \pi/2$ のとき $2x/\pi \leq \sin x$ が成り立つことを示せ．
2. 広義積分 I が存在することを示せ．
3. $\displaystyle 2I = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$ を示し，これを用いて I の値を求めよ．

(A1)
1. $0 < \alpha < 1$ のときに限って広義積分が存在する
2. $\alpha > 1$ のときに限って広義積分が存在する

(A2) $\deg P(x) = m, \deg Q(x) = n$ とすると $m + 2 \leq n$ が広義積分が存在する必要十分条件である．

(A3)
1. $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{k\pi + x} dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$． これから $\displaystyle\lim_{y \to \infty} \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = \infty$ がわかる．
2. $0 < p < q$ のとき
$$\int_p^q \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_p^q - \int_p^q \frac{\cos x}{x^2} dx$$
だが，$|\cos x| \leq 1$ より
$$\left| \int_p^q \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \int_p^q \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{p}.$$
よってコーシーの判定法より題意をえる（注：実は $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ である）．

(A4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + 1 - \cos x}{(x^2+1)x^p} dx$ が存在する必要十分条件は $p < 3$ である（$\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + \cdots$ より 0 の近傍で $\frac{x^2+1-\cos x}{(x^2+1)x^p}$ はおよそ $3x^{2-p}/2$ のようにふるまうから）．$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 1 - \cos x}{(x^2+1)x^p} dx$ が存在する必要十分条件は $p > 1$ である（x が大きければ $\frac{x^2+1-\cos x}{(x^2+1)x^p}$ はおよそ x^{-p} のようにふるまうから）．よって $1 < p < 3$ が求める必要十分条件である．

(B1)
1. $\tan(x/2)$
2. $\log\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right| = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$
3. $x + 2/(1 + \tan(x/2))$

(B2)
1. $\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$
2. $\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^- x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

(B3)
1. $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\log|x + \sqrt{x^2+a^2}|)$
2. $\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
3. $\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

(C1) 1. $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$ とする（不定積分）．部分積分の公式で $f = \sin^{n-1} x, g = -\cos x$ とすると

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

よって $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ をえる．ゆえに $J_n = [-\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$ である．

2. $J_0 \geq J_1 \geq \cdots$ は明らかなので，(1) とあわせると

$$1 \leq \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} \leq \frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

である．$n \to \infty$ とすると題意をえる．

3. $J_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2, J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$ より

$$J_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}, \quad J_{2n+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

だから以下の等式をえるが，ここで $n \to \infty$ とすればよい．

$$\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \cdots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

(C2) 1. $x = \sin\theta$ と変数変換して置換積分する（$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ でもあることに注意）．

2. $x = \tan\theta$ と変数変換して置換積分する（広義積分の存在はおまかせします）．

3. $e^x \geq 1 + x$ から従う．

4. $(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq 1/(1+x^2)^n$ より $J_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^\infty e^{-nx^2} dx \leq J_{2n-2}$. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ なので

$$\sqrt{n} J_{2n+1} \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} J_{2n-2}. \tag{1}$$

今 $J_{2n} J_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$ だから $\sqrt{\pi} = \sqrt{2(2n+1)} J_{2n+1} \sqrt{J_{2n}/J_{2n+1}}$ なので，(1) で $n \to \infty$ とすると $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} J_{2n+1} = \sqrt{\pi}/2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} J_{2n-2}$ がえられる．

(C3) 1. $y = \sin x$ は $[0, \pi/2]$ で上に凸だから明らかである（詳細はおまかせします）．

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -\log \frac{2x}{\pi} dx$ が存在することに注意する（$\int_0^1 \log x dx$ が存在するから）．$\forall x \in (0, \pi/2], |\log \sin x| \leq -\log \frac{2x}{\pi}$ なので I も存在する．

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x dx + \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ よりこれが $2I$ であることは易しい（$\int_0^{\pi/2} \log \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ である）．一方 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \pi/2 \cdot \log(1/2) + \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x dx$ で，$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \sin 2x dx = I$ も簡単に分かるので $I = -\frac{1}{2}\pi \log 2$ がえられた．