

- 今回は線型空間と線形写像を扱います。
- 配布資料等は <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017a.html> にもあります。

体 集合 \mathbb{F} が体であるとは

- (加法と呼ばれる) 写像 $+: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, (a, b) \mapsto a + b$ と
- (乗法と呼ばれる) 写像 $\cdot: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, (a, b) \mapsto a \cdot b$

が定まっていて、以下の 10 個の公理を満たすことを言う。

1. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, \forall c \in \mathbb{F}, (a + b) + c = a + (b + c),$
2. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, a + b = b + a,$
3. $\exists 0_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}, \forall a \in \mathbb{F}, 0_{\mathbb{F}} + a = a = a + 0_{\mathbb{F}},$
4. $\forall a \in \mathbb{F}, \exists b \in \mathbb{F}, a + b = 0_{\mathbb{F}} = b + a,$
5. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, \forall c \in \mathbb{F}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$
6. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, a \cdot b = b \cdot a,$
7. $\exists 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}, \forall a \in \mathbb{F}, 1_{\mathbb{F}} \cdot a = a = a \cdot 1_{\mathbb{F}},$
8. $\forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}, \exists b \in \mathbb{F}, a \cdot b = 1_{\mathbb{F}} = b \cdot a,$
9. $\forall a \in \mathbb{F}, \forall b \in \mathbb{F}, \forall c \in \mathbb{F}, a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$
10. $0_{\mathbb{F}} \neq 1_{\mathbb{F}}.$

線型空間 集合 V が \mathbb{F} 線型空間であるとは、

- (加法と呼ばれる) 写像 $+: V \times V \rightarrow V, (v, v') \mapsto v + v'$ と
- (スカラー倍と呼ばれる) 写像 $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

が定まっていて、以下の 8 つの公理を満たすことを言う。

1. $\forall v \in V, \forall v' \in V, \forall v'' \in V, (v + v') + v'' = v + (v' + v''),$
2. $\forall v \in V, \forall v' \in V, v + v' = v' + v,$
3. $\exists 0_V \in V, \forall v \in V, 0_V + v = v = v + 0_V,$
4. $\forall v \in V, \exists v' \in V, v + v' = 0_V = v' + v,$
5. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \mu \in \mathbb{F}, \forall v \in V, (\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v),$
6. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall v \in V, \forall v' \in V, \lambda \cdot (v + v') = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot v'),$
7. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \mu \in \mathbb{F}, \forall v \in V, (\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v),$
8. $\forall v \in V, 1_{\mathbb{F}} \cdot v = v.$

基底 以下の 2 条件が成り立つとき、 $v_1, \dots, v_d \in V$ を \mathbb{F} 線型空間 V の \mathbb{F} 基底という。

線型独立性 $\forall (c_i)_{i=1}^d \in \mathbb{F}^d, \left(\sum_{i=1}^d c_i v_i = 0_V \Rightarrow 1 \leq \forall i \leq d, c_i = 0 \right),$

V を生成すること $V = \mathbb{F}[v_1, \dots, v_d] := \left\{ \sum_{i=1}^d c_i v_i \mid (c_i)_{i=1}^d \in \mathbb{F}^d \right\}.$

有限生成 $V = \mathbb{F}[v_1, \dots, v_d]$ となる (有限個の) $v_1, \dots, v_d \in V$ が存在するような \mathbb{F} 線型空間 V は \mathbb{F} 有限生成とよばれる。 V が \mathbb{F} 有限生成であれば、 V に \mathbb{F} 基底が存在することが選択公理を用いずに証明できる。

次元 V を \mathbb{F} 線型空間とする. V に d 個の元からなる \mathbb{F} 基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d$ が存在するとき $\dim_{\mathbb{F}} V = d$ と定める (このとき他の基底も d 個の元からなることが証明できる).

部分線型空間 V を \mathbb{F} 線型空間とする. V の部分集合 W が V の \mathbb{F} 部分線型空間であるとは

1. $\mathbf{0}_V \in W$,
2. $\forall \mathbf{v} \in W, \forall \mathbf{v}' \in W, \mathbf{v} + \mathbf{v}' \in W$,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{v} \in W, \lambda \cdot \mathbf{v} \in W$.

線型写像 V, W を \mathbb{F} 線型空間とする. 写像 $f: V \rightarrow W$ が \mathbb{F} 線型写像であるとは, 以下が成り立つことである (スカラー倍の記号 \cdot は省略した).

1. $\forall \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{v}' \in V, f(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}')$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{v} \in V, f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$.

行列で表現される線型写像 A を \mathbb{F} 成分 $m \times n$ 行列とすると, 写像

$$F_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$$

が定まるが, これは \mathbb{F} 線型写像になっている (任意の \mathbb{F} 線型写像 $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ について, 唯一つの \mathbb{F} 成分 $m \times n$ 行列 A が存在して, $f = F_A$ となることが証明できる).

線型写像の核と像 V, W を \mathbb{F} 線型空間, \mathbb{F} 線型写像 $f: V \rightarrow W$ について

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\} \\ \text{Im } f &= \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} (= \{\mathbf{w} \in W \mid \exists \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} = f(\mathbf{v})\}) \end{aligned}$$

を f の核, 像という. これらはそれぞれ V, W の \mathbb{F} 部分線型空間であり, 以下が成立する.

- f が単射 $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\mathbf{0}_V\}$,
- f が全射 $\Leftrightarrow \text{Im } f = W$,
- $f = F_A$ のとき, $\text{rank } A = \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } f$.

次元定理 V, W を \mathbb{F} 線型空間, $f: V \rightarrow W$ を \mathbb{F} 線型写像とする. V が \mathbb{F} 有限生成であれば,

$$\dim V = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f.$$

線型同型 W_1, W_2 を \mathbb{F} 線型空間とする. 写像 $f: W_1 \rightarrow W_2$ が \mathbb{F} 線型同型であるとは, f が \mathbb{F} 線型写像でかつ全単射であることを言う (f が全単射であれば逆写像 $f^{-1}: W_2 \rightarrow W_1$ が存在するが, f が \mathbb{F} 線型同型であれば f^{-1} も \mathbb{F} 線型写像 (よって \mathbb{F} 線型同型) であることが証明できる. 圏論的には, f が \mathbb{F} 線型同型であることを「 \mathbb{F} 線型写像 $g: W_2 \rightarrow W_1$ が存在して $f \circ g = 1_{W_2}, g \circ f = 1_{W_1}$ 」と定義するのが自然だが, すぐ前の注意により 2 つの定義は同値になる).

正則行列との関係 A を \mathbb{F} 成分 $m \times n$ 行列とすると, F_A が線型同型 \Leftrightarrow 「 $m = n$ で $\det A \neq 0$ 」.

(B1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とする. 以下の行列を A とするとき, F_A が単射か全射か同型か判定しなさい.

$$(a). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad (b). \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad (c). \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(B2) 次の \mathbb{R}^5 のベクトルが一次従属になるような a の値を求めよ.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ a-2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ a-3 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ a-4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(B3) 線型写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 \end{pmatrix}$$

について、像 $\text{Im } f$ と核 $\text{Ker } f$ の基底をそれぞれ 1 組求めよ. また $\text{Im } f = \text{Ker } g$ となる線型写像 $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を 1 つ求めよ.

(B4) $f: V \rightarrow W$ を \mathbb{F} 線型同型とする. 以下を証明せよ (ヒント: $g = f^{-1}$ を考える).

- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ が線型独立ならば, $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n) \in W$ も線型独立である.
- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ が V を生成するならば, $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n) \in W$ も W を生成する.

(B5) 実数からなる数列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^\infty$ は, 任意の $n \geq 0$ について漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ が成立するとき, good であるということにする. good な数列の集合 V を考えよう.

$$V = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^\infty \mid \forall n \geq 0, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}.$$

V は加法とスカラー倍を以下のように定義でき, \mathbb{R} 線型空間になる (ここでは認めてよい).

加法 $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}, \mathbf{b} = (b_n)_{n \geq 0} \in V$ について, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_n + b_n)_{n \geq 0}$,

スカラー倍 $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0} \in V$ について, $c \cdot \mathbf{a} = (ca_n)_{n \geq 0}$.

- V の次元 d を求めよ.
- \mathbb{R}^d と V の間の写像の向き (すなわち $\mathbb{R}^d \rightarrow V$ または $V \rightarrow \mathbb{R}^d$) を好きに 1 つ選んで, \mathbb{R}^d と V の間の線型同型を 1 つ与えよ.

(B6) 1. 空集合 \emptyset は \mathbb{R} 線型空間になりえるか?

2. 1 つの元からなる集合 $X = \{*\}$ を考える. X は \mathbb{R} 線型空間になりえるか?

3. 2 つの元からなる集合 $X = \{*_1, *_2\}$ を考える. X は \mathbb{R} 線型空間になりえるか?

4. 整数の集合 $W = \mathbb{Z}$ を考え, 加法として通常の整数の足し算 $+$ を採用する. これにうまくスカラー倍を定義して, W を \mathbb{R} 線型空間にすることはできるか?

V を順序付き基底 $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ を持つ n 次元 \mathbb{F} 線型空間とし, W を順序付き基底 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ を持つ m 次元 \mathbb{F} 線型空間とする.

\mathbb{F} 線型写像 $f: V \rightarrow W$ を決めることと, $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n) \in W$ を決めることは同じである. そして $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n) \in W$ を決めることと, $j = 1, \dots, n$ について

$$f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{w}_i$$

なる $a_{ij} \in \mathbb{F}$ たち (ここで $1 \leq i \leq m$) を決めることは同じである. このようにして得られた行列

$$R_f = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

を, f の順序基底対 \mathbf{v}, \mathbf{w} に関する行列表示 (representation) とよぶ.

A が \mathbb{F} 成分の $m \times n$ 行列で, $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m, f = F_A$ のとき,

$$R_f = Q^{-1}AP$$

となる. ここで $P = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n), Q = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ は, それぞれの行列を並べて得られる正則行列である (P は $n \times n$ で, Q は $m \times m$).

$V = W, \mathbf{v} = \mathbf{w}$ のときは, R_f を f の順序基底対 \mathbf{v} に関する行列表示と呼ぶ. また \mathbf{v} をうまく選んで, R_f を対角行列にすることを, f の対角化 (diagonalization) と呼ぶ.

(C1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とし, $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ で定まる \mathbb{R} 線型写像 $F_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える. \mathbb{R}^2 の順序基底 $\mathbf{v} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ に関する F_A の行列表示を求めよ.

(C2) 線型写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$ について, \mathbb{R}^3 の基底

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ と \mathbb{R}^2 の基底 $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ に関する行列表示を求めよ.

(C3) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とし, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる \mathbb{R} 線型写像 $F_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える. \mathbb{R}^2 の任意の順序基底 $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ について, \mathbf{v} に関する F_A の行列表示は対角行列ではないことを示せ.

(C4) 高々 2 次の実数係数多項式のなる \mathbb{R} 線型空間 $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ は順序基底 $\mathbf{v} = (1, x, x^2)$ を持つ 3 次元 \mathbb{R} 線型空間である. 今, 以下の写像 T を考える:

$$T: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \quad f(x) \mapsto f(1+2x)$$

1. T は \mathbb{R} 線型写像であることを示せ.
2. T の順序基底 \mathbf{v} に関する行列表示を求めよ.

(C5) 2 次の複素正方行列のなす \mathbb{C} 線型空間 V から V への写像 f を

$$f(X) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

により定める. このとき次の問いに答えよ (京大の大学院入試より).

1. f が線型写像であることを示せ.
2. V の基底 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ に関する f の行列表示 A を求めよ.
3. A の行列式 $\det A$ を求めよ.