- 今日は重積分（とくに逐次積分）とガンマ関数といった特殊関数を扱います．
- 出席は一応とりますが，「50 可の判定に使う可能性がある」くらいに考えてください．
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017a.html` にもあります．

フビニの定理：$I=[a,b]\times[c,d]$ とし，$f: I\to\mathbb{R}$ をリーマン積分可能な関数とし，さらに任意の $y\in[c,d]$ について $f(\cdot,y):[a,b]\to\mathbb{R}, x\mapsto f(x,y)$ も $[a,b]$ でリーマン積分可能とする（$F(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ とおく）．このとき $F:[c,d]\to\mathbb{R}$ は $[c,d]$ でリーマン積分可能で

$$\int_I f(x,y)dxdy=\int_c^d F(y)dy.$$

よくある使い方：$\varphi_1,\varphi_2 : [a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ でリーマン積分可能と仮定する．さらに $\forall x\in[a,b], \varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ を仮定し

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$

とおく．$f: A\to\mathbb{R}$ が連続であれば

$$\iint_A f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

（注）A は面積確定集合になり，さらに f は A でリーマン積分可能になり，etc といった，等式が意味を持つための条件が，仮定から従うことの明示を省略しました．

1 演習問題

(A1) $f(x,y)=x+y, D=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 1\}(=[0,1]\times[0,1])$ とおく．

1. 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を定義に基づいて求めよ．
2. 累次積分 $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$ と $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$ をそれぞれ計算せよ．
3. 以上の 3 つの値がすべて一致することを確認せよ．

(A2) $[0,1]\times[0,1]$ 上の関数 f を次で定める：

$$f(x,y)=\begin{cases} y^{-2} & (0<x<y<1)\\ -x^{-2} & (0<y<x<1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

1. f は $[0,1]\times[0,1]$ で非有界であることを確認せよ．
2. 累次積分 $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$ と $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$ をそれぞれ計算し，これらが等しくないことを確認せよ．

(A3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を C^2 級の関数とする．$\partial_x\partial_y f=\partial_y\partial_x f$ であることをフビニの定理を使って証明せよ．

(A4)　次の積分を計算せよ．

$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy$$

ここで領域 D は，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq 0, x + y \leq 2, y \geq 0\}$ で与えられるものとする（2006 年京大の院試より）．

(A5)　$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ と集合 A を次のように定める．

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy\cos(y^2/x) & x \neq 0, y \in \mathbb{R}, \\ 0 & x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \pi, y \leq x \leq \pi\}$$

このとき，次の積分を求めよ（2007 年京大の院試より）．

$$\iint_A f(x,y)dxdy$$

(A6)　次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - xy - y^2}dxdy$$

ただし，a は正定数で，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq a^2\}$ とする（2008 年京大の院試より）．

(A7)　次の重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{dxdy}{1 + (x+y)^4}$$

ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ とする（2009 年京大の院試より）．

(B1) ベータ関数 B を次の広義積分で定めたい：

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

1. 右辺の広義積分が $x,y>0$ に対して収束することを示せ．
2. $x,y>0$ に対して次の関数等式 $B(x,y)=B(y,x), xB(x,y+1)=yB(x+1,y)$ を示せ．
3. $x,y>0$ に対して

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}(\sin s)^{2x-1}(\cos s)^{2y-1}ds$$

を示せ（ここから $a,b>-1$ に対して

$$\int_0^{\pi/2}(\sin s)^a(\cos s)^b ds=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)$$

となることがわかる．$b=0$ とすると前回のウォリス積分である）．

(B2) Gauss 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を示したい．

1. $R>0$ に対して，領域 D_R を $D_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0, x^2+y^2\leq R^2\}$ と定める．重積分 $\displaystyle\iint_{D_R}e^{-x^2-y^2}dxdy$ の値を求めよ．
2. $R>0$ に対して $I(R)=\displaystyle\int_0^R e^{-x^2}dx$ とおくとき，次の不等式を示せ．

$$\iint_{D_R}e^{-x^2-y^2}dxdy\leq I(R)^2\leq\iint_{D_{\sqrt{2}R}}e^{-x^2-y^2}dxdy$$

3. $\displaystyle\lim_{R\to\infty}I(R)$ を求めよ．これを用いて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を示せ．

(B3) ガンマ関数 $\Gamma(z)=\displaystyle\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$ について，$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ を示せ．

(B4) ベータ関数とガンマ関数の間の関係式 $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ を，$p,q\geq 1/2$ に対して示したい（実際は $p,q\geq 0$ でも成り立ちます）．固定した $p,q\geq 1/2$ に対し，

$$f(x,y)=4e^{-x^2-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}$$

とおく（ここで $x,y\geq 0$）．

1. $R>0$ に対して，領域 D_R を $D_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0, x^2+y^2\leq R^2\}$ と定める．$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iint_{D_R}f(x,y)dxdy$ の値を，ガンマ関数とベータ関数を用いて表示せよ．
2. (B2) と同じ論法で，目的の関係式を示せ．

(A1) 1. $I_1 = I_2 = [0,1]$ とする．$I_1 \times I_2$ の分割とは I_1 の分割 $\Delta_1 = (0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1)$ と I_2 の分割 $\Delta_2 = (0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = 1)$ の組のことである．この分割の幅 d は $d := \min\{\min\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \le i \le n\}, \min\{y_j - y_{j-1} \mid 1 \le j \le m\}\}$ と定義される．明らかに $\sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} = x_i + y_j$, $\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} = x_{i-1} + y_{j-1}$ なので，この分割に関する上方和は $U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ となり，下方和は $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{i-1} + y_{j-1})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ となる．$U + L = 2$ を示すことができる（メモ書きの計算を参考にしてください）．一方 $0 \le U - L$ は $U - L = \sum_{i,j}((x_i - x_{i-1}) + (y_j - y_{j-1}))(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \le 2d \sum_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = 2d$ と評価できるので，$d \to 0$ のとき $U \to 1, L \to 1$ である．よって重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ は存在して，その値は 1 である（注：授業では，重積分を 1 変数のリーマン積分同様，リーマン和の収束で定義しています．この解答では，上積分 = 下積分となることを重積分可能の定義に採用しているので，本当は少し修正が必要です）．

2. 累次積分を実行すると 1 が得られる（メモ書きの計算を参考にしてください）．

(A2) （注）<u>もしも</u> この関数 f が有界であるとすると，重積分 $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$ は存在します．何故かというと，$[0,1]\times[0,1]$ は面積確定集合で，f が不連続になる $\{(t,t) \mid 0 \le t \le 1\}$ は面積 0 だからです．しかし f は非有界なため重積分 $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$ は存在せず，フビニの定理の仮定が満たされていないことに注意してください．

1. $(2\varepsilon, \varepsilon)$ で $f = -\varepsilon^{-2}$ となるが，これは $\varepsilon \to 0$ とするといくらでも絶対値が大きくなる．
2. 累次積分を実行するとそれぞれ 1 と -1 がえられ（メモ書きの計算を参考にしてください），等しくないことが確認できます．

(A3) $\partial_x \partial_y f(a,b) \neq \partial_y \partial_x f(a,b)$ とする．$\partial_x \partial_y f(a,b) > \partial_y \partial_x f(a,b)$ であるとしても一般性を失わない．f が C^2 級であることの定義より $\partial_x \partial_y f, \partial_y \partial_x f$ は連続なので，$\exists \varepsilon > 0, \forall (a', b') \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \times [b-\varepsilon, b+\varepsilon], \partial_x \partial_y f(a', b') - \partial_y \partial_x f(a', b') > 0$ とできる．よって

$$\iint_{[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\times[b-\varepsilon,b+\varepsilon]} (\partial_x \partial_y f(s,t) - \partial_y \partial_x f(s,t))dsdt > 0$$

である．一方，フビニの定理を使うと左辺は 0 でなければならない（メモ書きの計算を参考にしてください）．よって矛盾が生じた．

(A4) $\int_0^1 dx \int_0^x dy (x^2 - y^2) + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy (x^2 - y^2)$ を計算すると 1 になります．

(A5) $\pi^2 - 4$（メモ書きの計算を参考にしてください）．

(A6) この問題は来週扱います．

(A7) 安直にフビニの定理を適用すると大変そうです（$1/(1+t^2)$ の原始関数は簡単ではないため）．$g(s) = 1/(1+s^4)$ とすると，問題になっている関数 $f(x,y) = 1/(1+(x+y)^4)$ は，$x + y = s$ のとき $f(x,y) = g(s)$ なので，$\iint_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4} = \int_0^1 sg(s)ds$ がわかります（メモ書きの図を参考にしてください）．$\int_0^1 sg(s)ds = \int_0^1 s/(1+s^4)ds$ を $u = s^2$ で置換積分すると，$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \pi/8$ と値が求まります．