- 今日は重積分（とくに変数変換）と 2 変数の広義積分を扱います．
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2017a.html` にもあります．
- 2018 年 1 月 9 日（火）は試験です（部屋等はまたアナウンスします）．
- 2017 年 12 月 19 日（火）は授業が休講なので，演習は 4 限に行おうかなと考えています．
- 2017 年 12 月 12 日（火）に線形のレポートを配布して，2017 年 12 月 19 日（火）に微積のレポートを配布予定です（多分 4 問ずつくらい）．

ヤコビ行列：$U \subseteq \mathbb{R}^2$ を開集合とし

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \mapsto (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}))$$

を C^1 級写像とする．φ の $\boldsymbol{x}$ に関するヤコビ行列を以下で定義する．

$$J\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\varphi_1(\boldsymbol{x}) & \partial_{x_2}\varphi_1(\boldsymbol{x}) \\ \partial_{x_1}\varphi_2(\boldsymbol{x}) & \partial_{x_2}\varphi_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

重積分の変数変換公式：$U \subseteq \mathbb{R}^2$ を開集合とし，$\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ は 3 条件

1. φ は単射
2. φ は C^1 級
3. φ は正則（$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in U, \det J\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$）

をみたすとする．$A \subseteq \mathbb{R}^2$ は面積確定でさらに $\overline{A} \subseteq U$ であるとし，f は $\overline{\varphi(A)}$ で定義された連続関数とする．このとき以下が成り立つ．

$$\iint_{\varphi(A)} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \iint_A f(\varphi(x_1, x_2)) |\det J\varphi(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$$

（注）上の公式は一例で，仮定などについていくつか version があります．

（注）$A \subseteq \mathbb{R}^2$ について，その閉包 $\overline{A}$ とは，A を含む最小の閉集合のことである．閉集合族 $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ も閉集合なので，$\overline{A} = \bigcap_{C \supseteq A} C$ となり $\overline{A}$ は well-defined である（ここで C は A を含む閉集合を走る．$C = \mathbb{R}^2$ は閉集合なので，添え字は空ではない）．

1 演習問題

(A1) $X = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ が面積確定集合かどうか答えよ（注：X はルベーグの意味では面積確定でその面積は 0 である．この問題では授業で論じたジョルダンの意味で面積確定かどうかということを聞いている）．

(A2) 次の変数変換に関し (x, y) の (u, v) に関する Jacobi 行列 $\begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix}$ と行列式を求めよ．

1. $x = u + v, y = u - v$
2. $x = u \cosh v, y = u \sinh v$

3.　$u=x^2+y^2, v=2xy$（ただし $x+y>0, x-y>0$）

(A3)　（斎藤さんの過去問より）重積分

$$\iint_{x^2+(y-1)^2\leq 1, 0\leq x\leq y} xydxdy$$

の値を次の方法で求めよ．

1.　y について先に積分する逐次積分

2.　$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ で変数変換

(A4)　直交座標 (x,y,z) の 3 次元極座標 (r,θ,ϕ) に関するヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_\phi x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_\phi y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_\phi z \end{pmatrix}$$

とその行列式を求めよ．ただし極座標（この場合，球座標ともいう）への変換は

$$x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, z=r\cos\theta.$$

(A5)　1.　半径 1 の球の体積は $4\pi/3$ であることを示せ．

2.　半径 1 の n 次元球 $D^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leq 1\}$ の体積は $\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ であることを示せ．$\Gamma(1)=1, \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}, \Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ より

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}=\begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & (n=2k) \\ \dfrac{2(k!)(4\pi)^k}{(2k+1)!} & (n=2k+1). \end{cases}$$

(A6)　次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-xy-y^2}dxdy$$

ただし，a は正定数で，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2\leq a^2\}$ とする（2008 年京大の院試より．前回の (A6)）．

(A7)　前回の (A7) で，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$ について

$$\iint_D \frac{dxdy}{1+(x+y)^4}=\frac{\pi}{8}$$

を扱った（2009 年京大の院試より）．これ変数変換によって示せ．

(A8)　平面内の領域 D を $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq y\}$ で定めるとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}dxdy$$

の値を求めよ（2012 年名古屋大学大学院入試より）．

(A9)　平面内の閉領域 $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq x\}$ を考える．重積分

$$\iint_D xdxdy$$

を計算せよ（平成 28 年阪大大学院入試より）．

2　広義積分

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ と $f : A \to \mathbb{R}$ について，

1. f は A で非有界
2. A は非有界

のいずれか（もしくは両方）が成り立つとき，$\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ は通常のリーマン積分ではない．以下，A が有界の場合は，面積確定であると仮定する（このとき f が有界であれば，$\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ は通常のリーマン積分で定義すればよい（存在するならば））．

$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} K_n := \bigcup_{n\geq 1} K_n = A$ となるコンパクト面積確定集合列とし，$\displaystyle\iint_{K_n} f(x,y)dxdy$ が定義されるとする．このような任意の $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ について

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x,y)dxdy$$

が存在し，さらに同一であるとき，この値で $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ を定義する．

（注）$A \subseteq \mathbb{R}^2$ がコンパクトであることは，A が有界閉集合であることと同値である．

絶対収束：上で f が非負（すなわち $\forall \boldsymbol{x} \in A, f(\boldsymbol{x}) \geq 0$）とすると，

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} K_n = A$ なる，ある $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x,y)dxdy$ が収束する
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} K_n = A$ なる，任意の $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x,y)dxdy$ が収束し，さらに値が同一になる

ことが同値になる．広義積分 $\displaystyle\iint_A f dxdy$ は $\displaystyle\iint_A |f| dxdy$ が存在するとき絶対収束するといい，このとき $\displaystyle\iint_A f dxdy$ も存在する．

（注）1 変数の広義積分は条件収束に類似した概念です．2 変数以上では，「任意の 領域の近似の仕方 $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ について同じ値に収束する」という条件がきついため，広義積分は絶対収束に類似した概念になり，ルベーグ積分論を適用するのが便利です．

(B1)　広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ は $0 < \alpha < 1$ で収束し，$\alpha \geq 1$ で発散するのだった（前々回の (A1)）．円板 $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ について，広義積分

$$\iint_A \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$$

の収束・発散を調べよ．ここで $\alpha > 0$ である．

(B2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ は $0 < \alpha \leq 1$ で発散し，$\alpha > 1$ で収束するのだった（前々回の (A1)）．円板 $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 1\}$ について，広義積分

$$\iint_A \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$$

の収束・発散を調べよ．ここで $\alpha > 0$ である．

(B3) $p, q > 0$ について，ベータ積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

は存在し，$B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ が成り立つのだった（前回の演習の (B4) で $p,q \geq 1/2$ のときに示しました．この条件は広義積分に関する面倒を避けるためにおきました）．ここで $p > 0$ について，ガンマ関数は以下で定義されるのだった．

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx.$$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ を四面体とする．$x+y+z = u, y+z = uv, z = uvw$ という変数変換を利用して，$p,q,r > 0$ について以下を示せ．

$$\iiint_A x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}dxdydz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}$$

(B4) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z\}$ について，広義積分

$$\iiint_V \frac{1}{(1+x^2+y^2)z^{3/2}}dxdydz$$

を計算せよ（平成 30 年度京大大学院入試より）．

(B5) $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\} \setminus \{(0,0)\}$ とおいて，以下の f を考える．

$$f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

1. 広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ は絶対収束しないことを示せ．
2. $K_n^{(1)}, K_n^{(2)}$ を

$$K_n^{(1)} = \left\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1\right\}, \quad K_n^{(1)} = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{n} \leq x \leq 1\right\}$$

と定めると，$K_1^{(1)} \subseteq K_2^{(1)} \subseteq \cdots$ と $K_1^{(2)} \subseteq K_2^{(2)} \subseteq \cdots$ はいずれも，コンパクト面積確定で $D = \lim_{n\to\infty} K_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} K_n^{(2)}$ をみたす．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{K_n^{(1)}} f(x,y)dxdy, \quad \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n^{(2)}} f(x,y)dxdy$$

をそれぞれ計算し，値が一致しないことを示せ．

3. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y), \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y)$ をそれぞれ計算せよ．

(A1) $I_1 = I_2 = [0,1]$ とする．$I_1 \times I_2$ の分割とは I_1 の分割 $\Delta_1 = (0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1)$ と I_2 の分割 $\Delta_2 = (0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = 1)$ の組のことである．$(x,y) \in I_1 \times I_2$ について，$(x,y) \in X$ なら $f(x,y) = 1$，$(x,y) \notin X$ なら $f(x,y) = 0$ と定める．この分割に関する f の上方和は $U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m 1 \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = 1$ となり，下方和は $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m 0 \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = 0$ となる．これは $\iint_X 1 dxdy := \iint_{I_1 \times I_2} f dxdy$ が存在しないことをいっているので，X は面積確定集合ではない（注：授業のように上面積と下面積を調べてもよいです．というか，この解答も本質的にはそうしています）．

(A2) 1. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \det J = -2$

2. $J = \begin{pmatrix} \cosh v & u \sinh v \\ \sinh v & u \cosh v \end{pmatrix}, \det J = u$

3. (u,v) の (x,y) に関する Jacobi 行列は $I = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ なので $J = I^{-1} = \frac{1}{2(x^2-y^2)} \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{u+v} + \sqrt{u-v} & \sqrt{u-v} - \sqrt{u+v} \\ \sqrt{u-v} - \sqrt{u+v} & \sqrt{u+v} + \sqrt{u-v} \end{pmatrix}$.

(A5) n 次元の極座標は

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \\
x_2 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} \\
x_3 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\
x_n &= r \cos\theta_1
\end{aligned}
$$

で定義できる．これのヤコビアンは $|J| = r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2}$ となる（詳細略）．以上より（前回の (B1) より $B(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sin^a t dt$ と，(B4) の $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ を用いると）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(D^n) &= \int_{D^n} 1 dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta_1 \cdots \int_0^\pi d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2} \\
&= \int_0^1 r^{n-1} dr \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta_1 \cdots \int_0^\pi \sin\theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_1 \\
&= \frac{1}{n} B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}) \cdots B(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}) \cdot 2B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{n} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdots \frac{\Gamma(\frac{2}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot 2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2}{2})} \\
&= \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}.
\end{aligned}
$$

(B1) $D_s = \{(x,y) \mid s \le x^2+y^2 \le 1\}$ とする．$0 < \alpha < 2$ のとき，$\iint_{D_s} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi}\int_s^1 \frac{rdrd\theta}{r^\alpha} = \frac{2\pi}{2-\alpha}(1-s^{2-\alpha})$ だから，$s \to 0$ とすれば広義積分が収束することがわかる．$\alpha = 2$ なら $\iint_{D_s} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} = -2\pi \log s$ となるので，広義積分は存在しない．$\alpha \ge 2$ のときも $(x^2+y^2)^{\alpha/2} \le x^2+y^2$ から広義積分は存在しない．

(B2) $D'_s = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le s^2\}$ とする．$\alpha > 2$ なら $\iint_{D_s} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{rdrd\theta}{r^\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha-2}(1-s^{\alpha-2})$ だから，$s \to \infty$ とすることで，広義積分が存在することがわかる．$0 < \alpha \le 2$ のとき存在しないことも (B1) と同様である（詳細略）．

(B3) 問題中の変数変換によって A は $\{(u,v,w) \mid 0 \le u,v,w \le 1\}$ に対応する（詳細略）．$x = u(1-v), y = uv(1-w), z = uvw$ だからヤコビアンは $|J| = u^2v$ となる（詳細略）．よって求める積分は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1\int_0^1 u^{p-1}(1-v)^{p-1}(uv)^{q-1}(1-w)^{q-1}(uvw)^{r-1}(1-u)^{s-1}u^2vdudvdw \\
&= \int_0^1 u^{p+q+r-1}(1-u)^{s-1}du \int_0^1 v^{q+r-1}(1-v)^{p-1}dv \int_0^1 w^{r-1}(1-w)^{q-1}dw \\
&= B(p+q+r,s)B(q+r,p)B(r,q).
\end{aligned}
$$

あとは $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ で書き直せばよい．