- 1〜5 のうち 3 問以上解いて提出することが想定されています．1 問 20 点です．
- 合計で n 問解いて，それらの点数が $20 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$ のとき，$p_1 + \cdots + p_m$ をレポートの点数とします（ここで $m = \min\{3, n\}$）．
- 線形代数演習の成績は，「レポートの成績」と「演習の試験（2018 年 1 月 9 日，部屋は 741 教室）の成績」と「授業の成績」の 3 つの因子によって決まります．
- 成人式等の都合で試験を受けられない人は，事情を考慮するので事前に連絡してください（代わりに口頭試問の実施などを考えています）．
- レポートには表紙を付けて，「線形代数学演習レポート（A ターム火曜 5 限，理 1 2,4,5,8 組）」と明記したうえ，学籍番号と氏名と**解いた問題番号**も記入してください．
- 手書きでなく TeX 等による清書ももちろん OK です．
- レポート用紙は A4 のものを使い，複数枚になる場合は左上をホッチキスで閉じてください．
- 2018 年 1 月 8 日（月）18:00 までに，教務課のレポートボックスに提出してください．
- 2017 年 12 月 19 日（火）は授業が休講なので，演習を 4 限に行います．

$\boxed{1}$ 長さ 1 の列ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，3 次の正方行列 $A(\boldsymbol{u})$ を次のように定義する．

$$A(\boldsymbol{u}) = E_3 - 2\boldsymbol{u} \cdot {}^t\boldsymbol{u}.$$

ただし E_3 は 3 次の単位行列であり，${}^t\boldsymbol{u}$ は列ベクトル $\boldsymbol{u}$ を転置して得られる行ベクトルである．このとき，以下の問に答えよ．

1. $A(\boldsymbol{u})$ の固有値を重複度も込めてすべて求めよ．
2. $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とするとき，積 $A(\boldsymbol{u})A(\boldsymbol{v})$ の定める線形変換が，ある軸に関する回転であることを示し，その回転軸および回転角の大きさを求めよ．

$\boxed{2}$ a を複素数とし

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく．さらに $\mathbb{C}^5$ の部分ベクトル空間 V_1, V_2, V_3 を以下のように定める．

$$V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^5 \mid A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}, V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^5 \mid A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}, V_3 = \{\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

1. $\operatorname{rank} A_1$ を求めよ．

2. $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathbb{C}^5$ となる a を求めよ．

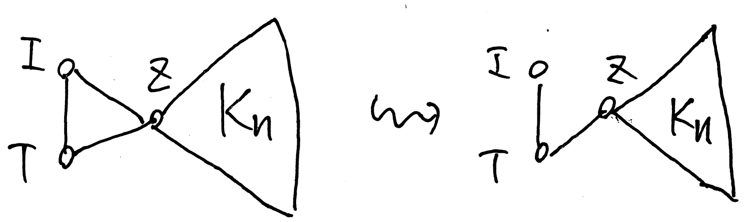
$\boxed{3}$ 複素数 a, b に対して，3 次の複素正方行列 A, B を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. A が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ．
2. A と B が相似であるための必要十分条件を求めよ．ただし，2 つの正方行列 X, Y が相似であるとは，ある正則行列 P が存在して，$Y = P^{-1}XP$ となることであることと定義され，X と Y のジョルダン標準形が（細胞の並び替えを除いて）等しいことと同値である．

$\boxed{4}$ $m \geq 1$ とする．複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ は $\alpha \neq 0$ であれば $\beta^m = \alpha$ となる複素数 $\beta \in \mathbb{C}$ を丁度 m 個もつ．それでは $\det A \neq 0$ なる $n \times n$ 複素行列 A は，いつ $B^m = A$ となる複素行列 B を丁度 m 個もつか調べよ．

$\boxed{5}$ Facebook に $n+2$ 人のアカウントがあって，友人関係は以下のようになっているとします．



- 頂点が人間に対応し，線で結ばれた頂点は友人同士であることを意味しています（友人という関係は対称的な関係であると仮定しています）．
- K_n は n 頂点からなり，任意の異なる 2 頂点が結ばれているような完全グラフです（とくに辺は ${}_nC_2$ 本あります．3 ページにある $n = 5$ の場合を参考にしてください）．
- I は K_n の 1 人（Z とする）とつながっていて，T も Z とつながっています．

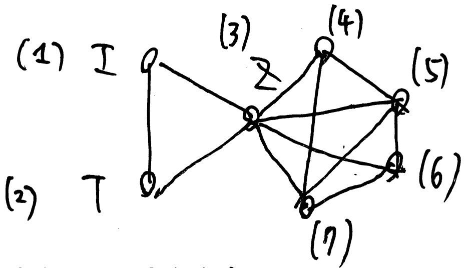
諸事情で I は Z と絶交することになりました．「ページランク，下がっちゃった」と I が T につぶやいたところ「まずは証明してみないとね．キミは仮にも数学者なんだから」と返されました．実際は I の直観に反して，n が大きいとき「I は Z とのリンクが切れることによって」I のページランクは増えることを証明してください（注：そもそも増えないかもしれません）．

◇ 問題の出典ですが，$\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$ は東大数理の院試から採用しました．$\boxed{4}$ は 2017 年 10 月 24 日の演習問題 (B3) に，$\boxed{5}$ は「京都のアルゴリズム（岩間一雄著，近代科学社）」に着想をえました．

以下，ページランクについて復習します．頂点集合 $V=\{v_1,\cdots,v_m\}$ からなる無向グラフ H が与えられたとき，以下の行列 M_H を考えます．

- 頂点 v_i から $v_{j_1},\cdots,v_{j_r}$ に辺が存在するとき，$(M_H)_{j_k,i}=1/r$ とする（$k=1,\cdots,r$）

例えば $n=5$ のとき，友人関係の無向グラフは



のようになり，以下をえます．

$$M_H=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

さて $0<\alpha<1$ を選んで

$$G(\alpha,M_H)=(1-\alpha)M_H+\alpha N$$

とします．ここで N はすべての成分が $1/m$ であるような $m\times m$ 行列

$$N=\begin{pmatrix} 1/m & 1/m & \cdots & 1/m \\ 1/m & 1/m & \cdots & 1/m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/m & 1/m & \cdots & 1/m \end{pmatrix}$$

で，気分としてはランダムジャンプに相当します（例えば，以下の文献も参考にしてください）．$G:=G(\alpha,M_H)$ を Google 行列とよぶ人もいます．**この問題では $\alpha=0.2$ としましょう．**

G が固有値 1 をもつことを示すのはやさしいですが，ペロン・フロベニウスの定理より

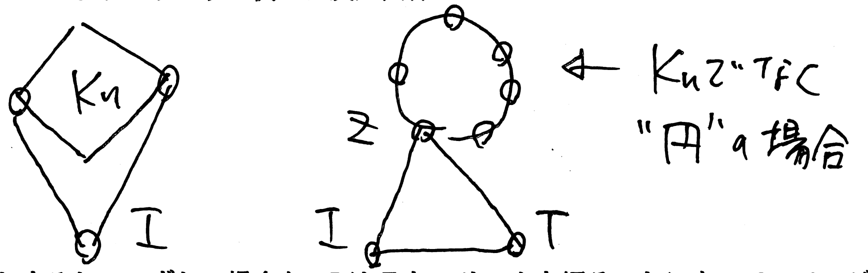
- G の絶対値最大の固有値は 1 で（ちなみに他の固有値は複素数かもしれません）
- 固有空間 $\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^m \mid G\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\}$ は 1 次元で
- その基底 $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m_{>0}$ ととれます

そこでこの基底 $\boldsymbol{w}={}^t(w_1,\cdots,w_m)\in\mathbb{R}^m_{>0}$ を $w_1+\cdots+w_m=1$ となるように正規化したとき，w_i が頂点 v_i のページランクと定義され，この友人関係の中の「重要度」の 1 つの指標とされます．ページランクは友人関係の無向グラフ H のみではなく，選んだパラメータ $0<\alpha<1$ によることに注意してください．$\alpha=1$ なら「全員平等の世界」になります．

参考までに，α と n について，Iのページランクの変化の実際の値を示します．ここで $a \to b$ とは，元の友人関係におけるIのページランクが a で，リンクが切れた後のIのページランクが b であることを意味しています．これからわかるように「リンクが切れたのにページランクが増える」という現象が成立するには，問題になっている無向グラフの特徴だけではなく，$\alpha > 0$ であることも重要そうです．

n/α	≈ 0	0.2	0.4
10	0.0208333→0.0106383	0.0424695→0.0394911	0.0568627→0.0551774
20	0.00518135→0.00260417	0.00260417→0.0200753	0.0285493→0.0294517
30	0.00228311→0.00114416	0.0122137→0.0134813	0.0190444→0.02010286
40	0.00127714→0.000639386	0.0089586→0.0101518	0.0142857→0.0152615
50	0.000814332→0.000407498	0.0070687→0.00814229	0.0114292→0.0123001

一般的に，ページランクを上げるには「ページランクの高い人と友達になる」ことが有効だといわれています．しかしそれは相手の承認がいることなので簡単ではありません．一方で「リンクを解消すること」は自分の意思で行うことができますが，たいていの場合「リンクを切る」とページランクは下がってしまうようです．例えば友人関係が



となっているとすると，いずれの場合も，IはZとのリンクを切ることによって，ページランクが減ってしまうようです（注：あくまで観察です）．