- 1〜5 のうち 3 問以上解いて提出することが想定されています．1 問 20 点です．
- 合計で n 問解いて，それらの点数が $20 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_n \geq 0$ のとき，$p_1 + \cdots + p_m$ をレポートの点数とします（ここで $m = \min\{3, n\}$）．
- 微分積分演習の成績は，「レポートの成績」と「授業の成績」によって決まります．
- 2018 年 1 月 9 日に 741 教室で線形代数演習の試験があります（成人式等の都合で試験を受けられない人は，事前に連絡してください．代わりに口頭試問の実施などを考えています）．
- レポートには表紙を付けて，「微分積分学演習レポート（A ターム火曜 5 限，理 1 2,4,5,8 組）」と明記したうえ，学籍番号と氏名と**解いた問題番号**も記入してください．
- 手書きでなく TeX 等による清書ももちろん OK です．
- レポート用紙は A4 のものを使い，複数枚になる場合は左上をホッチキスで閉じてください．
- 2018 年 1 月 15 日（月）18:00 までに，教務課のレポートボックスに提出してください．
- 線形代数演習レポートの提出期限は「2018 年 1 月 8 日（月）18:00 まで」としましたが，当日が休日だったので「2018 年 1 月 9 日（月）14:00 まで」とします．
- 前回の微積演習の (B4) は間違えていました（正しい答えは $2\pi^2$ だと思います．ご指摘ありがとうございました）．今日，正しい答えを配布します．

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ．

1. n を 0 以上の整数とするとき，$\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx$ を求めよ．
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sin x)^{2n+1}$ は，区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上，一様収束することを示せ．
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(\sin x) dx$ の値を小数点以下第 3 位を切り捨てて，第 2 位まで求めよ．

$\boxed{2}$ 平面内の原点を中心とする半径 ρ の閉円板を B_ρ で表す．すなわち

$$B_\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \rho^2\}.$$

1. 次の重積分を求めよ．

$$\iint_{B_\rho} x^2 dxdy, \quad \iint_{B_\rho} y^2 dxdy, \quad \iint_{B_\rho} xy dxdy$$

2. 実数値 2 変数関数 $u = u(x, y)$ は，原点 $(0, 0)$ のある近傍で C^3 級で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

が成り立つとする．次の極限値を求めよ．

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^2} \left| u(0, 0) - \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{B_\rho} u(x, y) dxdy \right|$$

$\boxed{3}$ $g(x,y) = (y^4 - y^6) - 3(x^2 + x^4)$ とおく．以下の問に答えよ．

1. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = g_x(x,y) = g_y(x,y) = 0\}$ を求めよ．
2. 曲線 $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S \mid g(x,y) = 0, y > 0\}$ 上で $f(x,y) = x^2 + y^2$ が極値をとる点をすべて求め，その値が極大であるか極小であるかを判定せよ．

$\boxed{4}$

1. すべての実数 x に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^4}$ は収束し，その極限値 $f(x)$ は x について連続であることを示せ．
2. 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ が収束することを示し，その値を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を用いてもよい．

$\boxed{5}$ Ω さんはライプニッツの信奉者です．ある朝，ライプニッツの公式

$$\pi = \lim_{N\to\infty} 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \lim_{N\to\infty} 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{2N-1}\right)$$

で $N = 500000$ と決め打ちしてみました．上段が π の小数展開で，下段が $4\displaystyle\sum_{n=1}^{500000} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ です：

$3.14159\underline{2}65358979323\underline{8}\underline{8}$

$3.14159\underline{2}6535897932\underline{38}4626433832\underline{79}502884197\underline{169}399375105\underline{820}974944\underline{592307}81640...$
$3.14159\underline{0}6535897932\underline{40}4626433832\underline{69}502884197\underline{291}399375103\underline{050}974944\underline{693349}81640...$

Ω さんは，以下の 2 つの現象が観察されたことをとくに興味深いと思いました：

- 違いは $6 + 12k$ 桁目に出現している（ここで $6 = \log_{10}(2N)$）
- 差 $2, -2, 10, -122, 2770, -101042$ は，数列検索エンジン `https://oeis.org/`によると，オイラー数 $E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1385, E_{10} = -50521$ の 2 倍である

この現象の理由を Ω さんに説明してください．ここでオイラー数 E_n とは，双曲線関数の（指数型とよばれる以下の形式の）テイラー展開を用いて定義される数です．

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} x^k$$

（出典）$\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$,$\boxed{4}$は東大数理の院試で，$\boxed{5}$の出典は「数学を生み出す魔法のるつぼ（伊知地宏訳，オライリー・ジャパン）」「UBASIC による解析入門（森本光生著，日本評論社）」などです．

1　べき級数

上限：数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ の上限 $A = \sup_n a_n$ とは，以下の 2 条件を満たすものである（最小上界．$(a_n)_{n\geq 0}$ が上に有界でないときは $A = +\infty$ と定義する）．

1. $\forall n \geq 0, a_n \leq A$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, A - \varepsilon < a_N$

上極限：数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ の上極限 $A = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ とは，以下の 2 条件を満たすものである（$(a_n)_{n\geq 0}$ が上に有界でないときは $A = +\infty$ と定義する）．

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, a_n < A + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0, \{n \geq 0 \mid a_n > A - \varepsilon\}$ は無限集合

コーシー・アダマールの定理による収束半径：ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ において

$$\alpha = \varlimsup \sqrt[n]{|a_n|}, \quad R = \frac{1}{\alpha}$$

とする（$\alpha = 0$ のときは $R = +\infty$ とし，$\alpha = +\infty$ のときは，$R = 0$ とする）．このとき

1. $|x| < R$ で $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ は絶対収束する．
2. $0 < R' < R$ について，$\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ は $|x| \leq R'$ で一様収束する．
3. $|x| > R$ ならば $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ は発散する

ダランベールの比判定法による収束半径：ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ において $\alpha = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在すると仮定すると，収束半径 R は $R = \dfrac{1}{\alpha}$ で与えられる（$\alpha = 0$ のときは $R = +\infty$ とし，$\alpha = +\infty$ のときは，$R = 0$ とする）．

ベキ級数の微積分：ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ の収束半径 R の内側で，その微分・積分が項別に行える．すなわち $|x| < R$ の関数としての以下の等式が成り立つ．

1. $\displaystyle\int \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$
2. $\displaystyle\frac{d}{dx} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

2　演習問題

(A1)　次の級数の収束半径を求めよ．

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n+1}}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}, \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n, \quad \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{2n}$$

(A2)
1. 関数 $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ を，$x = 0$ のまわりでベキ級数展開せよ．また，その収束半径 R を求めよ．
2. $|a| < R$ となる a について，関数 $f(x)$ を $x = a$ のまわりでベキ級数展開せよ．その級数が収束するような x の範囲を求めよ．

(A3)　$f(x) = (1+x)e^{-x} - (1-x)e^x$ のべき級数展開を用いて，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ を求めよ．

(A4)　（斎藤さんの過去問より）ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ の収束半径を r とし，開区間 $(-r, r)$ で定義された関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ で定める．
1. 収束半径 r を求めよ．
2. 導関数 $f'(x)$ を求めよ．
3. $f(x)$ を求めよ．
4. $f(\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ を求めよ．

(A5)　レポート問題 5 のライプニッツの公式を示したい．そのため $|t| < 1$ で

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots$$

に注目する（絶対収束）．$|x| < 1$ について，0 から x まで項別積分して

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{x} + \cdots$$

をえる．右辺は $x = 1$ でも収束し（2017/10/03 の (B5) の (5)），$\arctan x$ が $x = 1$ で連続であることより，以下（アーベルの定理）を示せば十分である：

> ベキ級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ を考える．$x = 1$ とした $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ は収束すると仮定する（注：これから $f(x)$ の収束半径 R について $R \geq 1$ がわかる）と，$\displaystyle\lim_{x\to 1-} f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n$.

1. $s_n = a_0 + \cdots + a_n$（部分和）について，以下を示せ．
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = (1-x)(s_0 + s_1 x + \cdots + s_{n-1} x^{n-1}) + s_n x^n.$$
2. アーベルの定理を示せ．

3　一様収束と項別微積分

各点収束：$E \subseteq \mathbb{R}$ で定義された関数列 $(f_n)_{n\geq 0}$ と関数 f について，$\lim_{n\to\infty} f_n = f$（各点収束）とは，$\forall x \in E, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つことである．すなわち

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

一様収束：$E \subseteq \mathbb{R}$ で定義された関数列 $(f_n)_{n\geq 0}$ と関数 f について，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となるとき，$(f_n)_{n\geq 0}$ は f に一様収束するという．

連続性の遺伝：$E \subseteq \mathbb{R}$ で定義された関数列 $(f_n)_{n\geq 0}$ と関数 f について，$(f_n)_{n\geq 0}$ は f に一様収束し，各 f_n が E で連続であれば，f も E で連続である．

項別微分（その 1）：f_n を区間 (a,b) 上の C^1 級関数列とする．さらに

1. 導関数列 $(f'_n)_n$ が関数 g に (a,b) で一様収束し
2. 関数列 $(f_n)_n$ が関数 f に (a,b) で一様収束する

と仮定する．このとき f は (a,b) で微分可能であり，かつ $f' = g$ が成り立つ．

項別積分（その 1）：区間 $[a,b]$ で f_n がリーマン積分可能で，f に一様収束するとき，f も $[a,b]$ でリーマン積分可能で，$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ が成り立つ．

(注)：「関数列 $(f_n)_n$ が関数 f に一様収束するとき，f_n の「良い性質」が f にも遺伝する」というタイプの定理を上に 3 つまとめた．実際には，より緩い仮定（いくつも微妙な variation があるので注意しよう）で十分であり，実用上も重要である．

項別微分（その 2）：f_n を区間 (a,b) 上の微分可能関数列とする．さらに

1. 導関数列 $(f'_n)_n$ が関数 g に (a,b) で一様収束し
2. ある 1 点 $c \in (a,b)$ において点列 $(f_n(c))_n$ が収束する

と仮定する．このとき $(f_n)_n$ はある関数 f に一様収束し，f は (a,b) で微分可能で，さらに $f' = g$．

(注)：次はルベーグの有界収束定理の原始形と思える．

項別積分（その 2, アルツェラの定理）：$[a,b]$ でリーマン積分可能な関数の列 $(f_n)_n$ が，f に各点収束し，さらに

1. 関数列 $(f_n)_n$ は一様有界（つまり $\exists C > 0, \forall x \in [a,b], \forall n, |f_n(x)| < C$）
2. f は $[a,b]$ でリーマン積分可能

と仮定する．このとき $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ が成り立つ．

4 演習問題

(B1) 以下の例をつくれ.

1. 各 f_n は連続で，ある f に各点収束しているが，f は連続でない
2. 各 f_n は微分可能で，ある微分可能な f に各点収束しているが，f'_n は収束しない
3. 各 f_n は $[0,1]$ でリーマン積分可能で，ある f に各点収束しているが，f は $[0,1]$ でリーマン積分可能でない

(B2) $\mathbb{R}$ で定義された関数列 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ を考える（$n \geq 0$）.

1. $\mathbb{R}$ において，$(f_n)_{n\geq 0}$ はある関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に一様収束することを示せ.
2. $x \neq 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$ が成り立つことを示せ.
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f'_n(0) \neq f'(0)$ を示せ.

(B3) この問題の目的は $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$（オイラー）を示すことである．$S = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ とすると

$$S = \sum_{n\,\geq\,1\,:\,\text{奇数}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\,\geq\,1\,:\,\text{偶数}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\,\geq\,1\,:\,\text{奇数}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}S$$

だから（$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ が絶対収束級数であることを用いた），$\dfrac{\pi^2}{8} = \displaystyle\sum_{n\,\geq\,1\,:\,\text{奇数}} \frac{1}{n^2}$ を示せばよい.

1. $k \in \mathbb{Z}$ について $c_k = \displaystyle\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}kx} dx$ を求めよ.
2. 演習冒頭に説明したように，細かいことを気にしなければ $x - \dfrac{1}{2} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$ と思えるのだった．$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$ を打ち切った $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$ は $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ であることを示せ.
3. 以上より $x - \dfrac{1}{2} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi x}$ が想像できますが，以下に従って厳密に証明せよ.
   (a) $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi n)}$ を示せ
   (b) 上の等式を $1/2$ から $x \in (0,1)$ まで積分することによって，以下を示せ：「任意の $0 < \delta < 1/2$ について，$[\delta, 1-\delta]$ 上 $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ は $x - \dfrac{1}{2}$ に一様収束する」
4. $x - \dfrac{1}{2} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ を $1/2$ から $x \in (0,1)$ まで積分すると，3(b) より項別積分できて $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx) - (-1)^n}{2\pi^2 n^2}$ だが，これに $x = 1$ を代入できれば $\dfrac{1}{8} = \displaystyle\sum_{n\,\geq\,1\,:\,\text{奇数}} \frac{1}{\pi^2 n^2}$ がえられる．$x = 1$ を代入できることを正当化せよ.

(A5) 1 は帰納法で証明できる．2 は，まず $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ の場合に帰着できることに注意する．$|x|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} s_n x^n = 0$ だから $f(x) = (1-x)\sum_{n\geq 0} s_n x^n$．$s_n \to 0$ を仮定しているから，$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |s_n| < \varepsilon$ である．今 $0 < x < 1$ において評価式 $|f(x)| \leq (1-x)(|\sum_{n=0}^{N-1} s_n x^n| + \frac{\varepsilon x^N}{1-x})$ がえられるから，$x \to 1-$ のとき $|f(x)| \leq 2\varepsilon$.

(B1) 1. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$（連続）とすると，極限関数 f は存在して以下である（不連続）．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

2. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$ とすると，これは恒等的に 0 なる関数 f に収束する．一方 $f_n' = n\cos(n^2 x)$ は $n \to \infty$ で収束しない．

3. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ を以下で定めると，極限関数は以下の f である．不連続点は有限個だから f_n はリーマン積分可能だが，f はリーマン積分不可能である（ルベーグ積分は可能）．

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (n!x \in \mathbb{Z}) \\ 1 & (n!x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

(B2) 1. f_n は $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ なる関数に一様収束する．実際 $|x| < \varepsilon$ ならば $|f_n(x)| < \varepsilon$ であり，$|x| \geq \varepsilon$ のときは $n \geq 1/\varepsilon^2$ ならば $|f_n(x)| < \frac{|x|}{nx^2} \leq \varepsilon$ となる．

2,3 $f_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ である．$x \neq 0$ であれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$ である（分子は n の 1 次式だが，分母は n の 2 次式のため）．一方 $\forall n, f_n'(0) = 1$ だが $f'(0) = 0$ である．

(B3) 1. $e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \cos(2\pi nx) + \sqrt{-1}\sin(2\pi nx)$ で愚直に計算すればよい．詳細は省略するが $c_0 = 0, c_k = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi k}$ である（$k \neq 0$）

2. $n \neq 0$ であれば $c_{-n}e^{-2\pi\sqrt{-1}nx} + c_n e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$ である．

3.（a） $z^{-N} + \cdots + z^N = \frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1} = \frac{z^{N+1/2} - z^{-N-1/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}}$ に $z = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ を代入する．

（b） $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi\sqrt{-1}nx} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$ を 1/2 から x まで積分する（$x \in (0,1)$）と，

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(2\pi kx)}{\pi k} = \int_{1/2}^{x} \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} dx$$

ここで部分積分より右辺は

$$-\left[\frac{\cos((2N+1)\pi t)}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin(\pi t)}\right]_{1/2}^{x} + \int_{1/2}^{x} \frac{\cos((2N+1)\pi t)}{2N+1} \left(\frac{1}{\sin(\pi t)}\right)' dx$$

だが，$\frac{1}{\sin(\pi t)}, \left(\frac{1}{\sin(\pi t)}\right)'$ は $[\delta, 1-\delta]$ で有界だから，すぐ上の式は $N \to \infty$ で一様に 0 に収束する．

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx) - (-1)^n}{2\pi^2 n^2}$ は $[0,1]$ で一様に（絶対）収束しているので（詳細略），極限は x について連続である．右辺は明らかに $x = 1$ で連続だから，$x = 1$ を代入したものは，$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx) - (-1)^n}{2\pi^2 n^2}$ で $x \to 1-$ としたものに等しい．