- 演習の定期試験とレポートによって S2 の数学基礎理論演習の成績が決まります．
- 微積と線形合わせて 1 つの成績がつきます．
- 授業の成績は S2 の演習の成績には寄与しない予定です．
- 毎回出席をとりますが，S1 同様「50 可」の判定に使う程度で，成績にはほぼ関係しません．
- 配布資料等は `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/2018.html` にあります（メッセージフォームにリンクを張っています．匿名で要望等あれば，お気軽にどうぞ)．
- 問題を解く順序はありません．授業の深めることが目的なので，自分にあった問題に取り組んでください．友達と議論したり，web を調べるのもご自由に．

1 復習：（行）階段行列

掃出し法（Gaussian elimination）とは，3 つの**行基本変形**：

- ある行に，0 でない数をかける
- ある行にある数（0 でもよい）をかけて，他の行に加える
- 2 つの行を入れ替える

によって，与えられた行列を**階段行列**（echelon matrix）：

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1} & \cdots & & & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{r,j_r} & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

に変形することである（ここで $j_1 < j_2 < \cdots < \cdots < j_r$ かつ $a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{r,j_r} \neq 0$)．ここで非ゼロな数 $a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \cdots, a_{r,j_r}$ は **pivot**（枢軸）と呼ばれる．

すなわち，階段行列 A とは次の様なものである：ある r が存在して（実は $r = \mathrm{rank}(A)$ である）

1. $(r+1)$ 行目から最終行までは，すべて 0
2. 1 行目から r 行目の各行には，pivot が 1 つずつ存在して
   - pivot は「だんだん右に」分布する
   - どの pivot も「その左と下」の数（ないかもしれない）は 0 になっている

例えば $\begin{pmatrix} \circ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \circ 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は階段行列である（$r = 2$ で，pivot には○をつけた)．

2　復習：連立方程式の解法

掃出し法によって，連立一次方程式を解くことができる（注：証明は授業でそのうちやると思います）．そのあらすじは以下のとおりである：

1. 連立方程式は，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形に変形できる（ここで A は $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{x}$ は n 次元ベクトル，$\boldsymbol{b}$ は m 次元ベクトル）．この A を**係数行列**，$m \times (n+1)$ 行列 $(A, \boldsymbol{b})$ を**拡大係数行列**と呼ぶ．
2. 拡大係数行列に掃出し法を適用し，階段行列 $(B, \boldsymbol{c})$ を得たとする（ここで B は $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{c}$ は m 次元ベクトル）と，与えられた連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ と同値になる．
3. $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ は，B が階段行列なので逆向きに解くことができる（**後退代入**）．
4. できない場合, 解は存在しない．ちなみに解が存在する必要十分条件は $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, \boldsymbol{b})$ で，解が存在する場合の解の自由度（パラメータの数）は $n - \operatorname{rank} A$ である．

3　掃出し法の練習

(X1) 以下の行列が階段行列であることを, pivot に○をつけることで確認せよ． $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(X2) 次の行列を，掃出し法によって階段行列に変形せよ． $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(X3) 係数行列が階段行列になっている $\begin{cases} 3x - 5y + 3z + w = 0 \\ \quad -y - z + 2w = 0 \\ \quad\quad -7z + 7w = 0. \end{cases}$ を後退代入によって解け．

(X4) 以下の連立方程式を，掃出し法によって解け． $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$

(X5) 以下が解を持つような k の値を定め，解を求めよ． $\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 2x + 7y - 4z = 3 \\ 3x + 7y - 6z = k. \end{cases}$

$\boxed{1}$ $x, y, \cdots$ を未知変数とする以下の連立方程式を解け．ただし，変数・パラメータ共に実数の範囲を考えるものとする．また (b) と (c) では，解を持つための定数 $a, b, \cdots$ の条件を求め，その条件下で解を求めよ．

(a). $\begin{cases} x+2y+6z+7w=-1 \\ 3x+y+3z+16w=2 \\ 3x-4y-12z+11w=7, \end{cases}$ (b). $\begin{cases} x+y-2z+3w=a \\ x+2y+z-2w=b \\ 2x+3y-z+w=c \\ 3x+5y-w=d, \end{cases}$ (c). $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ bx+y+az=1 \\ x+ay+bz=1 \end{cases}$

$\boxed{2}$ 以下の行列が逆行列を持つかどうか調べ，持つ場合は逆行列を求めよ．

$$\text{(a).}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b).}\ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 & x \\ x & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ 以下の行列のランクを求めよ（(b) は x で場合分け）．

$$\text{(a).}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & 5 & -7 & 8 \\ 4 & 19 & -7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & -8 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b).}\ \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ 以下の行列の行列式を求めよ．

$$\text{(a).}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b).}\ \begin{pmatrix} a & b & a & -b \\ b & a & -b & a \\ a & -b & a & b \\ -b & a & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{(c).}\ \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ 以下の行列の行列式を求めよ．

$$\text{(a).}\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b).}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ $x_1 \sim x_5$ を未知変数とする以下の連立方程式を解け．(b) では，解を持つための定数 a の条件を求め，その条件下で解を求めよ．ただし，変数・パラメータ共に実数の範囲を考える．

(a). $\begin{cases} x_1+2x_2+x_4-x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3+2x_5=5 \\ -2x_1-4x_2+2x_3-3x_4+6x_5=3 \\ -3x_1-6x_2+2x_3-3x_4+5x_5=2, \end{cases}$ (b). $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4=a \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=1 \\ x_1-4x_3+5x_4=3. \end{cases}$

$\boxed{7}$ a を複素数とし

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}$$

とおく．$\operatorname{rank} A_1$ を求めよ．

（注）東大数理の院試の一部です．

$\boxed{8}$ 2 つの実パラメータ α, β を含む ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ に関する以下の連立方程式を考える．

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & 1-\alpha & -2 & -7-\alpha & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & 2+\alpha & 4 & 5+\alpha+\beta & -9 \\ 6 & 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5-\alpha-3\beta \\ -2 \\ 2+2\alpha+2\beta \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) 解が存在するための (α, β) に関する必要十分条件を求めよ．

(b) 解がただ 1 つ存在するための (α, β) に関する必要十分条件を求めよ．

(c) $\alpha = \beta = 1$ は (b) の条件を満たす．$\alpha = \beta = 1$ のとき，解 ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ を求めよ．

（注）13 年前に受験した RIMS（京都大学数理解析研究所）の院試から出題しました（ただし検算用に (c) を追加した）．