行基本変形 (basic row operation)　以下の 3 つの操作のこと

1. i 行と j 行を入れ替える（$i \neq j$）
2. i 行に，K の非ゼロ元 c をかける（$c \neq 0$）
3. i 行に，j 行の K の元 c 倍を加える（$i \neq j,\, c \in K$）

連立方程式の拡大係数行列に行基本変形を施しても，同値な連立方程式が得られる．

置換 (permutation)　n 点集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ からそれ自身への全単射 $\sigma : \{1,2,\cdots,n\} \xrightarrow{\sim} \{1,2,\cdots,n\}$ のこと．$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ のように 2 行表示される．

行列式 (determinant)　$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ について

$$\det A = \sum_{\sigma : n\text{ の置換}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

転倒数 (number of transpositions)　$\mathrm{trans}(\sigma) = |\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}|$.

符号 (signature)　$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = (-1)^{\mathrm{trans}(\sigma)}$.

サラスの方法 (Sarrus's rule)　2×2 行列と 3×3 行列の行列式を定義通り求めること．

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

余因子 (cofactor)　$n \times n$ 行列 A の i 行 j 列を削除し，$(n-1) \times (n-1)$ 行列 B を得たとする．$(-1)^{i+j} \det B$ を A の (i,j) 余因子と呼び，$\widetilde{a}_{ij}$ と書く．

余因子行列 (cofactor matrix)　$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ について，

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{n2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{a}_{2n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

で与えられる $n \times n$ 行列（転置に注意）．$\det A \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widetilde{A}$.

余因子展開 (cofactor expansion)　$n \times n$ 行列 A の $\det A$ を再帰的に求める方法．

（i 行）　$\det A = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in}$

（j 列）　$\det A = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a}_{nj}$

以下は，4×4 行列の 1 列に関する余因子展開である．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

(C1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行列式と余因子行列は何か？

(C2) $1+\omega+\omega^2=0$ のとき，余因子行列を用いて $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(C3) $n \times n$ 行列 A の行列式 $\det A$ と余因子行列 $\widetilde{A}$ の定義を述べなさい．

(C4) 全単射 $f : \{1, 2, \cdots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \cdots, n\}$ を $1, 2, \cdots, n$ の置換と呼び，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$ と 2 行表示するのであった．$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，符号数 $\mathrm{sign}(\sigma), \mathrm{sign}(\tau), \mathrm{sign}(\sigma\tau), \mathrm{sign}(\tau\sigma\tau)$ を求めよ．

(C5) 以下の 4×4 行列の行列式を求めよ．

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,　(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　(c) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{pmatrix}$,　(d) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.

(C6) 連立方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ を考える．今

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と置く．$\det((\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)) \neq 0$ と仮定するとき，クラメルの公式

$$x_1 = \frac{\det((\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n))}{\det((\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n))}$$

を示せ（ヒント 1：元の連立方程式は $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ と等価である．ヒント 2：行列式の列に関する多重線形性と交代性を思い出す)．

(C7) クラメルの公式を用いて, 次の連立方程式を解け． $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(C8) $n \times n$ 行列 A の成分がすべて整数であるとする．このとき $\det A = \pm 1$ であることと，A^{-1} が存在してかつ A^{-1} の成分もすべて整数であることは同値であることを示せ．

1　行列の対角化

$n\times n$ 行列 A が**対角化可能**であるとは，ある可逆 $n\times n$ 行列 P が存在して，$D:=P^{-1}AP$ が対角化行列になることをいう．対角化は可能だったりそうでなかったりする．以下がその判定方法と，対角化可能な場合の P と D の計算手順である（**注：証明は授業でそのうちやると思います**）：

1. A の固有値 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ を列挙する．これは固有多項式 $\det(tE_n-A)=0$ という方程式を解くことで達せられる．
2. 固有値 α_i の線型独立な固有ベクトル $\boldsymbol{p}_{i,1},\cdots,\boldsymbol{p}_{i,d_i}$ を計算する（$i=1,2,\cdots,s$）．これは $(A-\alpha_iE_n)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ という連立方程式を解くことで達せられる．
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{s}d_i=n$ であるときに限って A は対角化可能である．P として

$$P=\left(\boldsymbol{p}_{1,1},\cdots,\boldsymbol{p}_{1,d_1},\boldsymbol{p}_{2,1},\cdots,\boldsymbol{p}_{2,d_2},\cdots,\boldsymbol{p}_{s,1},\cdots,\boldsymbol{p}_{s,d_s}\right)$$

が取れ（固有ベクトルを並べた行列），このとき $D=P^{-1}AP$ は，対角線に

$$\underbrace{\alpha_1,\cdots,\alpha_1}_{d_1\text{ 個}},\underbrace{\alpha_2,\cdots,\alpha_2}_{d_2\text{ 個}},\cdots,\underbrace{\alpha_s,\cdots,\alpha_s}_{d_s\text{ 個}}$$

が，この順に並んだ対角行列になる．

よく使う事実として，「A の固有多項式が 1 次式に分解し，重根をもたなければ，A は対角化可能」がある．

2　対角化の練習

(A1) 行列 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ は対角化不可能であることを示せ．

(A2) 以下の行列の固有値を求めよ．

$$\text{(a). }\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix},\qquad \text{(b). }\begin{pmatrix}6 & -3 & -7\\ -1 & 2 & 1\\ 5 & -3 & -6\end{pmatrix},\qquad \text{(c). }\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(A3) (A2) の行列の固有ベクトルを求めよ．

(A4) (A2) の行列のうち，対角化可能なものはどれか？

(A5) (A4) の行列 A について $P^{-1}AP$ が対角行列になるような可逆行列 P を求めよ．

(A6) (A5) について，それぞれ $P^{-1}AP$ を求めよ（注意：逆行列と行列積の計算は不要）．

(A7) 行列 $\begin{pmatrix}2 & -1 & a\\ -1 & 2 & a\\ -1 & 1 & a+2\end{pmatrix}$ が対角化可能かどうか調べよ．

固有多項式 (eigen polynomial, characteristic polynomial) $n \times n$ 行列 A の固有多項式 $\chi_A(t)$ は $\chi_A(t) = \det(tE_n - A)$ と定義される．実は固有値は固有多項式の解と同じである．

固有値・固有ベクトル (eigenvalue, eigenvector) $n \times n$ 行列 A について，$\lambda \in K$ が A の固有値であるとは，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{v} \in K^n$ が存在することを言う．このとき $\boldsymbol{v}$ を固有値 λ の固有ベクトルと呼ぶ．

対角化 (diagonalization) $n \times n$ 行列 A について，可逆行列 P をうまく選んで，$P^{-1}AP$ を対角行列にすること．

3 宿題

$\boxed{1}$ 以下の行列 A, B について，それぞれ対角化可能かどうか調べ，対角化可能な場合は $D := P^{-1}AP, D' := Q^{-1}BQ$ が対角行列になるような可逆行列 P, Q と対角行列 D, D' を求めよ．

$$\text{(a).}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b).}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ 6 & 3 & -4 & 4 \\ 5 & -1 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ 複素数 a に対して，3 次の複素正方行列 A を次のように定める．A が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ（東大数理の院試の一部）．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 3 \end{pmatrix}.$$

4 おまけ（解答なし）

(X1) 対角化可能な $n \times n$ 行列 A, B が，$AB = BA$ ならば，$P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ が対角行列になるような可逆な $n \times n$ 行列 P が存在することを示せ（解けることは想定されていません）．

(X2) $1, 2, \cdots, n$ の置換の集合を S_n と書こう（当然 $|S_n| = n!$ である）．置換 $\sigma \in S_n$ の転倒数を $\mathrm{trans}(\sigma)$ とすると，$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{trans}(\sigma)}$ なのであった．多項式 $\sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{trans}(\sigma)}$ を積表示せよ（ヒント：$n = 2, 3, 4$ で答えのあたりをつける）．

(X3) 実行列 $n \times n$ 行列 A, B について，$AB - BA = E_n$ となることはないことを示せ（ヒント：$n = 1, 2$ のときは証明できるだろうか？）．

(X4) A, B を $n \times n$ の正方行列とするとき（ここで $n \geq 2$），$\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ と $\widetilde{\widetilde{A}} = \det(A)^{n-2}A$ を示せ（注：A, B が可逆行列のときはやさしい）．