1　テイラー展開・ロピタルの定理 ($a, b \in \mathbb{R}$ は，$a < b$ とする)

1.1　復習：最大値の定理とロルの定理

最大値の定理：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば，f は最大値 $d_{\max}$ と最小値 $d_{\min}$ を持つ．

（コメント）これはとても重要な定理である．とりあえず今回はこれの証明についてはふれない．

ロルの定理：関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続，(a, b) で微分可能，$f(a) = f(b)$ ならば，$a < \exists c < b, f'(c) = 0$.

（注）$x = a, b$ における片側微分可能性は必要ない．

（証明のスケッチ）最大値の定理より $(d_{\max}, d_{\min})$ が存在する．$d_{\max} = d_{\min}$ ならば，f は恒等関数なので，$d_{\max} \neq d_{\min}$ のときを扱う．対称性から $d_{\max} > f(a)(= f(b))$ としても一般性を失わない．このとき $f(c) = d_{\max}$ なる c は $f'(c) = 0$ を満たすことが示せる．

1.2　テイラー展開

テイラーの定理：関数 f は $a < b$ を含む開区間で n 回微分可能ならば，

$$\exists c \in (a, b), f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

（証明のスケッチ）定数 $M = (f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k)/(b-a)^n$ と定義する．以下の関数

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - M(x-a)^n$$

について，$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0$ と $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!M$ が確認できる．

　今 $g(a) = 0$ で，M の定義より $g(b) = 0$ なので，ロルの定理より $\exists c_1 \in (a, b), g'(c_1) = 0$ である．すると $g'(a) = g'(c_1) = 0$ なので，ロルの定理より $\exists c_2 \in (a, c_1), g''(c_2) = 0$ である．繰り返すと $\exists c_n \in (a, c_{n-1}), g^{(n)}(c_n) = 0$ となる．この c_n が求める c である．

1.3　ロピタルの定理

コーシーの平均値定理：関数 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続で，(a, b) で微分可能とする．さらに $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ を仮定すると，

$$\exists c \in (a, b), \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

（証明のスケッチ）まず左辺の分母は 0 にならないことに注意する．実際，$g(a) = g(b)$ ならば，ロルの定理によって $\exists c \in (a,b), g'(c) = 0$ となって，仮定に反する．今，関数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

と定義する．これは $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ となっていて，$[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能なので，$\exists c \in (a,b), \varphi'(c) = 0$．$\varphi'(c) = 0$ を書き直すと，$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ となる．

（注）コーシーの平均値定理において，$g(x) = x$ としたものが，平均値の定理である．

ロピタルの定理：f, g を $x = a$ を含む開区間 U で定義された微分可能な連続関数とする．3 条件

1. $f(a) = g(a) = 0$
2. $\forall x \in U \setminus \{a\}, g'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ が存在する

が満たされるとき，$\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ も存在し，$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ が成り立つ．

（注）ロピタルの定理には，片側極限について述べたものや，$a = \infty$ とするもの，∞/∞ の不定形を扱うものなどがある．また 3 条件の述べ方が微妙に異なる version もある（e.g.,f, g が C^1 であることを仮定するなど）．

（証明のスケッチ）平均値の定理より，$\forall x \in U \setminus \{a\}, \exists c, (f(x) - f(a))/(g(x) - g(a)) = f(x)/g(x) = f'(c)/g'(c)$（ここで $\varepsilon > 0$ を用いて $x = a \pm \varepsilon$ のとき，$c \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ である）．$x \to a$ とすると，$c \to a$ で，最右辺の存在が仮定されているのだった．

（名言, V.I. アーノルド）If a notion bears a personal name, then this name is not the name of the discoverer （訳：概念に人の名前がついている場合，それは発見者の名前ではない）．ロピタルの定理は，ベルヌーイによる（このアーノルドの名言も，スティグラーによるものだそうです）．

ニュートン法：f を α のまわり U で定義された微分可能な関数で，$f(\alpha) = 0$ とする．初期値 x_0 を α の近くにとり，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

を反復していくことで，$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$ と α を求めること（常に可能とは限らない）．

（注）：ニュートン法で数列 $(x_n)_{n \geq 0}$ が α に収束するためのよくある条件に

1. f は C^3 級
2. $f'(\alpha) \neq 0$
3. x_0 は α に近い

というものがある（演習問題 B4 を参照）．ニュートン法の大域的な収束については，分かっていないことが多い（演習問題 B5 を参照）．

2 練習問題

(A1) $x=a$ のまわりで定義された n 回微分可能な関数 f について，

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を，f の $x=a$ における n 次のテイラー多項式という．

次の f について，$x=0$ における n 次のテイラー多項式を具体的に求めよ．

1. $f(x)=e^x$
2. $f(x)=\sin x$
3. $f(x)=\log(1+x)$
4. $f(x)=\cosh x$

(A2) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続で，(a,b) で微分可能で，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f'(x)=\gamma$ が存在するとき，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\gamma$ を示せ（特に f は $x=a$ で片側微分可能である）．

(A3) 次の極限を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin(2x)}{x-\sin x}$

(A4)

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{1}=0$ は何故正しくないか？
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin(1/x)}{e^x-1}$ にロピタルの定理が適用できない理由を説明し，この極限値を求めよ．
3. 2 ページに述べたロピタルの定理を

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(f(x)-f(0))/x}{(g(x)-g(0))/x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

と証明することについて，コメントを述べよ．

(A5) $x=a$ のまわり U で定義された n 回微分可能な関数 f について，以下の関数を考える（これは $U\setminus\{a\}$ で定義されている）．

$$H(x)=\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)/(x-a)^n.$$

1. $f^{(n)}$ が連続であれば $\displaystyle\lim_{x\to a}H(x)=0$ を示せ．
2. 「$f^{(n)}$ が連続」という仮定を外し，単に「n 回微分可能」のとき，どうだろうか？

(A6) 実係数多項式 $f(x)$ の（ゼロでない）項の数が n 個のとき，$f(x)=0$ の実数解は高々 $2n-1$ 個であることを示せ．

3 練習問題

(B1) $x = a$ のまわりで定義された n 回微分可能な関数 f について，

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

を，f の $x = a$ における n 次のテイラー多項式という．

1. $f(x) = \arctan x$ について，$x = 0$ における n 次のテイラー多項式を具体的に求めよ．
2. マチンの公式 $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ を示せ．
3. π の近似値を求めよ（誤差評価はしなくてよい）．
4. π の定義は何だろう？（発展課題, 円周を持ち出す場合，円周の定義は何でしょう？）

（名言, H. ポワンカレ）水源は不明でも，それでも川は流れている．

(B2) 次の極限を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(\cos x) + x^2}{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x}$

(B3) C^∞ 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$ を考える．

1. 初期値 $x_0 = 2$ を選んで，ニュートン法を実行し，x_1, x_2, x_3, x_4 を求め，$\sqrt{2}$ と比較せよ．
2. 漸化式 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = (x_n + 2/x_n)/2$ に，授業でならった以外の幾何学的意味は見出せるだろうか？

(B4) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続で，(a, b) で 2 回微分可能とする．以下を仮定する．

- $f(a) < 0, f(b) > 0$
- $\exists D > 0, \forall x \in (a, b), f'(x) \geq D$
- $\exists C > 0, \forall x \in (a, b), 0 < f''(x) \leq C$

1. $\exists! \alpha \in (a, b), f(\alpha) = 0$ を示せ．
2. $x_0 = b$，$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ によって数列 $(x_n)_{n\geq 0}$ を定める．以下を示せ．

$$\forall n \geq 0, \exists c_n \in (a, b), x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$$

3. $A = C/2D$ のとき，以下を示せ．

$$0 < x_n - \alpha < A^{-1}(A(x_0 - \alpha))^{2^n}$$

4. (B3) において，$x_n - \sqrt{2}$ の評価を与えよ．

(B5) ニュートン法とフラクタルの関係を調べよ（発展課題）．

(B6) $\sin 1 = 0.8414709848\cdots$ の近似値を，$1 - 1/3! + 1/5! - 1/7! + \cdots$ を打ち切ることで 50 桁程度の精度で求めたい．つまり $|\sin 1 - a_N| < 10^{-50}$ となるには N をどうとればよいか？ここで $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

(A1) 1. $\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$

2. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$ を x^n までで打ち切ったもの

3. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^k/k$ を x^n までで打ち切ったもの

4. $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}/(2k)!$ を x^n までで打ち切ったもの

(A2) $0 < h \le b-a$ について，平均値の定理より $\exists c \in (a, a+h), \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(c)$ が成り立つ．$h \to +0$ のとき，$c \to +a$ なので，$\lim_{h\to+0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{c\to a+0} f'(c) = \gamma$ である．

(A3) すべてロピタルの定理で計算できる（適用条件の確認は省略する）．

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-(1-x^2)^{-1/2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(1-x^2)^{-3/2}(-2x)/2}{6x} = -\dfrac{1}{6}$.
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2\cos(2x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-2\sin x + 4\sin(2x)}{\sin x} = 6$.

(A4) 1. 2 ページのロピタルの定理において，条件 1 が満たされていない．

2. $(x^2\sin(1/x))' = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ なので，2 ページのロピタルの定理において，条件 3 が満たされていない．$x \ne 0$ について，テイラーの定理より $\exists\theta \in (0,1), e^x - 1 = x + (\theta x)^2/2$ となる．$0 < |x| < 1$ であれば

$$\left|\frac{x^2\sin(1/x)}{e^x - 1}\right| \le \left|\frac{x^2}{x + (\theta x)^2/2}\right| \le |x|\frac{1}{1-1/2} = 2|x|$$

なので $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin(1/x)}{e^x-1} = 0$ である．

3. $\dfrac{f'(0)}{g'(0)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ に，f', g' が $x = 0$ で連続であることを用いている．したがって 2 ページのロピタルの定理より強い仮定のもとで証明していることになる（実用上はそれで十分かもしれない）．

(A5) 1. テイラーの定理より，a のまわりの $x = a \pm \varepsilon$ について（ここで $\varepsilon > 0$），

$$\exists c, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

ここで $x = a+\varepsilon, a-\varepsilon$ に応じて，$c \in (a, a+\varepsilon), (a-\varepsilon, a)$ である．よって

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

なので $H(x) = (f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a))/n!$ となる．$x \to a$ のとき $c \to a$ となるが，$f^{(n)}$ は連続なので $\lim_{c\to a} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a)$ が成り立つ．したがって $\lim_{x\to a} H(x) = 0$ である．

2. 成り立つ．n についての帰納法で示す．$n=1$ のとき，

$$H(x)=\frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$$

なので，f が微分可能であれば，定義によって $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))/(x-a)=f'(a)$ なので，$\lim_{x\to a}H(x)=0$ である．
$n\geq 2$ のとき，

$$\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)'=f'(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

に注意する．$f^{(k+1)}(a)=f'^{(k)}(a)$ であり，f' は $n-1$ 回微分可能なので

$$\lim_{x\to a}\left(f'(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)/(x-a)^{n-1}=0$$

が帰納法の仮定から従う．よって $\lim_{x\to a}H(x)$ の計算にはロピタルの定理が使え，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}H(x)&=\lim_{x\to a}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)/(x-a)^n\\&=\lim_{x\to a}\left(f'(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)/n(x-a)^{n-1}=0.\end{aligned}$$

(A6) n についての帰納法で示す．$n=1$ のとき，$f(x)=ax^r$ という形をしているので，解は $x=0$ の 1 個である（ここで $a\neq 0, r\geq 0$）．$n\geq 2$ のとき，$f(x)=x^s g(x)$ と書き直す．ここで $s\geq 0$ で，$g(x)$ は定数項が 0 でない多項式である．g の実数解を $x_1<\cdots<x_m$ とすると

$$\exists y_1\in(x_1,x_2),\cdots,\exists y_{m-1}\in(x_{m-1},x_m), g'(y_1)=\cdots=g'(y_{m-1})=0$$

となる（$\because$ ロルの定理）．今，g も f と同じ仮定「項の数が n 個」を満たすので，g' は「項の数が $n-1$ 個」である．よって帰納法の仮定より $m-1\leq 2(n-1)-1$ が成り立つ．f の解は $x_1,\cdots,x_m,0$ の $m+1$ 個（$s>0$ のとき），または $x_1,\cdots,x_m$ の m 個（$s=0$ のとき）あり，$m+1\leq 2(n-1)+1=2n-1$ となっている．

(B1) 1. $a_m=f^{(m)}(0)$ とする．$f'=1/(1+x^2)$ より，$(1+x^2)f'=1$．これを m 回微分すると，ライプニッツ則 $(fg)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}f^{(k)}g^{(m-k)}$ より，$(1+x^2)f^{(m+1)}+2mxf^{(m)}+m(m-1)f^{(m-1)}=0$．よって $a_{m+1}+m(m-1)a_{m-1}=0$ がわかる．$a_0=\arctan 0=0$, $a_1=f'(0)=1$ と漸化式より $a_{2m}=0, a_{2m+1}=(-1)^m(2m)!$ なので，答えは $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$ を x^n で打ち切ったもの．

2. $\tan a=1/5, \tan b=1/239$ とする．加法公式より $\tan(2a)=(2\tan a)/(1-\tan^2 a)=5/12, \tan(4a)=(2\tan(2a))/(1-\tan^2 2a)=120/119$, $\tan(4a-b)=(\tan 4a-$

$\tan b)/(1+\tan 4a \tan b)=1$．$a=\arctan 1/5, b=\arctan 1/239$ とすると，$\tan(4a-b)=1$ より $\exists m \in \mathbb{Z}, 4a-b=\pi/4+m\pi$ となる．$0<a,b<\pi/4=\arctan 1$ より，$-\pi/4<4a-b<\pi$ なので，$m=0$，すなわち $4a-b=\pi/4$ である．

3. $5^{-6}=(0.2)^7=0.0000128$ と $239^{-3}=1/13651919<10^{-7}$ に注目して，

$$\arctan\frac{1}{5} \fallingdotseq \frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}=0.1973955\cdots$$
$$\arctan\frac{1}{239} \fallingdotseq \frac{1}{239}=0.0041841\cdots$$

と打ち切ると，$\pi \fallingdotseq 16\cdot 0.1973955-4\cdot 0.0041841=3.14159\cdots$ となる．

(B2) ロピタルの定理が適用できることの確認は省略する．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)^{-1}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-2}}{2}=1/2.$
2. $\displaystyle\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{24}=1/3$. よって求める極限は，$\displaystyle\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=1/3.$
3. $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots, e^x=1+x+x^2/2+x^3/6+\cdots$ より，$e^{x^2}=1+x^2+x^4/2+x^6/6+\cdots$, $\sin^2 x=x^2-x^4/3+(1/60+1/36)x^6+\cdots$ なので，$e^{x^2}-1-\sin^2 x=5x^4/6+\cdots$ である．$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}, \log(1-x)=-x-x^2/2-x^3/3-\cdots$ より, $\log(\cos x)=-x^2/2-(1/8-1/24)x^4+\cdots$ なので, $2\log(\cos x)+x^2=-x^4/6+\cdots$. よって求める極限は $-1/5$（正当化はおまかせします）.

(B3) 1. $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)=(x_n+2/x_n)/2$ より，

x_0	2	2
x_1	$\left(2+\frac{2}{2}\right)/2=\frac{3}{2}$	1.5
x_2	$\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)/2=\frac{17}{12}$	$1.\underline{41}66666\cdots$
x_3	$\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right)/2=\frac{577}{408}$	$1.\underline{41421}568\cdots$
x_4	$\left(\frac{577}{408}+\frac{816}{577}\right)/2=\frac{665857}{470832}$	$1.\underline{41421356237}4\cdots$
$\sqrt{2}$		$1.41421356237309\cdots$

2. $\sqrt{2}$ は面積が 2 の正方形の辺の長さである．ニュートン法でえられる漸化式 $x_{n+1}=(x_n+2/x_n)/2$ は，「縦 x_n, 横 $2/x_n$ の面積が 2 の長方形から，安直に平均をとることで正方形をえている」とも解釈できる．

(B4) 1. 中間値の定理より $\exists\alpha\in(a,b), f(\alpha)=0$ である．$\forall x\in(a,b), f'(x)>0$ より，f は狭義増加関数である（平均値の定理の系！）から，このような α はただ 1 つ存在する．

2. テイラーの定理より, $\exists c_n\in(a,b), f(\alpha)=f(x_n)+f'(x_n)(\alpha-x_n)+\frac{f''(c_n)}{2}(\alpha-x_n)^2$ となる（注：実際には c_n は α と x_n の間にある．f'' が正であるという仮定より，$y=f(x)$ は下に凸なので，$\alpha<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<x_0=b$ となる）が，これを $f'(x_n)\neq 0$

で割ると，

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \alpha - x_n + \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2.$$

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ より，$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$ となる．

3. 2 より $0 < x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2 \le A(x_n - \alpha)^2$．すなわち $0 < A(x_{n+1} - \alpha) \le (A(x_n - \alpha))^2$ である．これより帰納的に $0 < A(x_n - \alpha) \le (A(x_0 - \alpha))^{2^n}$ が従う．
4. $f(x) = x^2 - 2$ で $a = 1, b = 2$ と設定すると，$D = 1, C = 2$ と取れる（よって $A = 1$）．$2 - \sqrt{2} < 0.6$ より，$x_n - \sqrt{2} < (0.6)^{2^n}$．$\log_{10}\left(0.6^{2^n}\right) \fallingdotseq -2^n \cdot 0.22$ より，x_n は $\sqrt{2}$ と少なくとも $2^n/5$ 桁は一致しているということである．

(B5) A. ケーリーは 1879 年に，$f(z) = z^3 - 1$ にニュートン法を適用し，収束していく様子を記述する問題を提起した．以下のように実験できる（1 は BSD 系 OS では wget ではなく fetch かもしれません）．青が $z = 1$ に収束する領域，赤が $\omega := (-1 + \sqrt{-3})/2$ に収束する領域，緑が $\overline{\omega} = \omega^2$ に収束する領域である．

1. `wget http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tshun/test_fr.cpp`
2. `g++ test_fr.cpp -std=c++0x -O3 -o test_fr`
3. `./test_fr 5.0 0.01`
4. `gnuplot`
5. `set size square`
6. `set xrange [-7.5:7.5]`
7. `set yrange [-7.5:7.5]`
8. `plot "h1" with dots lc rgb "red","h0" with dots lc rgb "blue","h2" with dots lc rgb "green"`
9. `quit`

(B6) テイラーの定理より $\exists\theta \in (0,1), |\sin 1 - a_n| = |\sin\theta|/(2n+2)! < 1/(2n+2)!$ となるので，$(2N+2)! > 10^{50}$ となる $N = 20$ととればよい（階乗の評価には $n! > (n/e)^n$ などの不等式を用いてもよいでしょう）．