

- 1  $a, b$  を  $0 < a, b < 1$  をみたす実数とし, 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$$

を考える. 以下の間に答えよ (出典: 名大多元数理 2006 年度院試の 1 を改題).

- (1a)  $A$  の固有値を求めよ.  
 (1b)  $A$  が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能な場合は  $D = P^{-1}AP$  が対角行列になるような可逆行列  $P$  と対角行列  $D$  を求めよ.  
 (1c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  を求めよ.

- 2 行列

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -9 \\ 9 & -8 & 9 \\ 9 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

について, 以下の間に答えよ (出典: 名大多元数理 2008 年度院試 (第 2 次募集) の 1 を改題).

- (2a)  $A$  が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能な場合は  $D = P^{-1}AP$  が対角行列になるような可逆行列  $P$  と対角行列  $D$  を求めよ.  
 (2b)  $A = B^2$  をみたす実行列  $B$  が存在するかどうか答えよ. もし存在するならばそのような行列  $B$  を 1 つ求め, もし存在しないならばその理由を説明せよ.  
 (2c)  $A = C^3$  をみたす実行列  $C$  が存在するかどうか答えよ. もし存在するならばそのような行列  $C$  を 1 つ求め, もし存在しないならばその理由を説明せよ.

- 3 以下の  $4 \times 4$  行列  $M$  を考える (注:  $M$  は演習中のページランクの説明に登場した確率行列である. 確率行列とは, 各成分が非負で, 各列の和が 1 の実正方行列のことである).

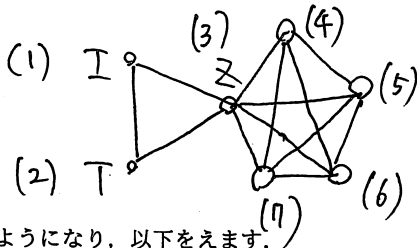
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (3a)  $M$  は固有値 1 をもつことを示せ.  
 (3b)  $M$  の固有値  $\lambda \in \mathbb{C}$  について,  $\lambda = 1$  でなければ  $|\lambda| < 1$  を示せ.  
 (3c)  $e_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$  について,  $w := \lim_{n \rightarrow \infty} M^n e_1$  が存在し,  $w$  は  $M$  の固有値 1 の固有ベクトルであることを示せ (収束の議論については神経質にならなくてよい).

以下、ページランクについて復習します。頂点集合  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  からなる無向グラフ  $H$  が与えられたとき、以下の行列  $M_H$  を考えます。

- 頂点  $v_i$  から  $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$  に辺が存在するとき、 $(M_H)_{j_k, i} = 1/r$  とする ( $k = 1, \dots, r$ )

例えば  $n = 5$  のとき、友人関係の無向グラフは



のようになり、以下をえます。

$$M_H = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

さて  $0 < \alpha < 1$  を選んで

$$G(\alpha, M_H) = (1 - \alpha)M_H + \alpha N$$

とします。ここで  $N$  はすべての成分が  $1/m$  であるような  $m \times m$  行列

$$N = \begin{pmatrix} 1/m & 1/m & \dots & 1/m \\ 1/m & 1/m & \dots & 1/m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/m & 1/m & \dots & 1/m \end{pmatrix}$$

で、気分としてはランダムジャンプに相当します (例えば、以下の文献も参考にしてください)。

$G := G(\alpha, M_H)$  を Google 行列とよぶ人もいます。次ページの問題 [4](#) では  $\alpha = 0.2$  としましょう。

$G$  が固有値 1 をもつことを示すのはやさしい ([3](#) の 1 を参照) ですが、ペロン・フロベニウスの定理より

- $G$  の絶対値最大の固有値は 1 で (ちなみに他の固有値は複素数かもしれませんが)
- 固有空間  $\{v \in \mathbb{R}^m \mid Gv = v\}$  は 1 次元で
- その基底  $w$  を  $w \in \mathbb{R}_{>0}^m$  ととれます

そこでこの基底  $w = {}^t(w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{R}_{>0}^m$  を  $w_1 + \dots + w_m = 1$  となるように正規化したとき、 $w_i$  が頂点  $v_i$  のページランクと定義され、この友人関係の中の「重要度」の 1 つの指標とされます。ページランクは友人関係の無向グラフ  $H$  のみではなく、選んだパラメータ  $0 < \alpha < 1$  によることに注意してください。  $\alpha = 1$  なら「全員平等の世界」になります。

4 (おまけ. この問題は「京都のアルゴリズム (岩間一雄著, 近代科学社)」に着想をえました) Facebook に  $n + 2$  人のアカウントがあって, 友人関係は以下のようになっているとします.



- 頂点が人間に対応し, 線で結ばれた頂点は友人同士であることを意味しています (友人という関係は対称的な関係であると仮定しています).
- $K_n$  は  $n$  頂点からなり, 任意の異なる 2 頂点 that 結ばれているような完全グラフです (とくに  $n=5$  の場合を参考にしてください).
- I は  $K_n$  の 1 人 (Z とする) とつながっていて, T も Z とつながっています.

諸事情で I は Z と絶交することになりました. 「ページランク, 下がっちゃった」と I が T につぶやいたところ「まずは証明してみないとね. キミは仮にも数学者なんだから」と返されました. 実際は I の直観に反して,  $n$  が大きいとき「I は Z とのリンクが切れることによって」I のページランクは増えることを証明してください.

参考までに,  $\alpha$  と  $n$  について, I のページランクの変化の実際の値を示します. ここで  $a \rightarrow b$  とは, 元の友人関係における I のページランクが  $a$  で, リンクが切れた後の I のページランクが  $b$  であることを意味しています. これからわかるように「リンクが切れたのにページランクが増える」という現象が成立するには, 問題になっている無向グラフの特徴だけではなく,  $\alpha > 0$  であることも重要そうです.

$n/\alpha$	$\approx 0$	0.2	0.4
10	0.0208333 $\rightarrow$ 0.0106383	0.0424695 $\rightarrow$ 0.0394911	0.0568627 $\rightarrow$ 0.0551774
20	0.00518135 $\rightarrow$ 0.00260417	0.00260417 $\rightarrow$ 0.0200753	0.0285493 $\rightarrow$ 0.0294517
30	0.00228311 $\rightarrow$ 0.00114416	0.0122137 $\rightarrow$ 0.0134813	0.0190444 $\rightarrow$ 0.02010286
40	0.00127714 $\rightarrow$ 0.000639386	0.0089586 $\rightarrow$ 0.0101518	0.0142857 $\rightarrow$ 0.0152615
50	0.000814332 $\rightarrow$ 0.000407498	0.0070687 $\rightarrow$ 0.00814229	0.0114292 $\rightarrow$ 0.0123001

一般的に, ページランクを上げるには「ページランクの高い人と友達になる」ことが有効だといわれています. しかしそれは相手の承認があることなので簡単ではありません. 一方で「リンクを解消すること」は自分の意思で行うことができますが, たいていの場合「リンクを切る」とページランクは下がってしまうようです.