1　2 変数関数の微分

開集合・閉集合：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と $r > 0$ について

$$U(\boldsymbol{x}; r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < r\}$$

を，中心が $\boldsymbol{x}$ の半径が r 開円盤とよぶ（ここで $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ について $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$）．

- $U \subseteq \mathbb{R}^2$ が開集合とは，$\forall \boldsymbol{x} \in U, \exists r > 0, U(\boldsymbol{x}; r) \subseteq U$
- $C \subseteq \mathbb{R}^2$ が閉集合とは，$\mathbb{R}^2 \setminus C$ が開集合

（注）これから $S \subseteq \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f : S \to \mathbb{R}$ の，$\boldsymbol{x} \in S$ における連続性や微分可能性を考えるが，普通は $\exists r > 0, U(\boldsymbol{x}; r) \subseteq S$ という状況で考える（このことを，ここでは「f は $\boldsymbol{x}$ のまわりで定義された」とぼかして表現する）．こうなっていないと気持ちわるいからである．

連続性：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわり S で定義された $f : S \to \mathbb{R}$ が，$\boldsymbol{x}$ で連続とは

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}).$$

（注）$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ として，ε-δ 論法で明示的に書き下すと：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (z_1, z_2) \in S, \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(z_1, z_2) - f(x_1, x_2)| < \varepsilon.$$

（全）微分可能性：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f が，$\boldsymbol{x}$ で微分可能とは（ここで $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}$ は内積）

$$\exists \boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|} = 0. \tag{1}$$

（注）微分可能であることは，偏微分可能性と区別するため，しばしば全微分可能ともよばれる．

偏微分可能性：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f が，$\boldsymbol{x}$ で第 i 方向に偏微分可能とは（$i = 1, 2$）

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

が存在することで，この値を $\partial_i f(\boldsymbol{x})$ と書く．ここで $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ である．

（注）$\partial_i f(\boldsymbol{x})$ はもちろん「$\partial_i f$ の $\boldsymbol{x}$ での値」という意味である（$f(\boldsymbol{x})$ はただの数なので，これの ∂_i は変である）．$i = 1, 2$ に応じて，$\partial_i f$ は $\partial_x f, \partial_y f$ や $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ とも書かれる．以下，第 1 方向と第 2 方向共に偏微分可能なことを，単に偏微分可能と略記する．

性質：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ のまわりで定義された f について：

1. $\boldsymbol{x}$ で全微分可能ならば，$\boldsymbol{x}$ で連続である
2. $\boldsymbol{x}$ で全微分可能ならば，$\boldsymbol{x}$ で偏微分可能で $\partial_i f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i$（(1) の記法を用いた）
3. f が $\boldsymbol{x}$ で連続偏微分可能（C^1 級）ならば，f は $\boldsymbol{x}$ で全微分可能である

（注）このうち 3 は重要である（連続偏微分可能は「連続かつ偏微分可能」ではなく，「偏微分可能で偏微分が連続」である）．証明の要点は，

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=(f(x+h,y+k)-f(x+h,y))+(f(x+h,y)-f(x,y))$$

と変形し，平均値の定理を用いることであった：

$$\begin{aligned}&0<\exists\theta_1<1, f(x+h,y)-f(x,y)=\partial_x f(x+\theta_1 h,y)h\\ &0<\exists\theta_2<1, f(x+h,y+k)-f(x+h,y)=\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)k.\end{aligned}$$

ここまでで偏微分可能性は用いているが，偏微分の連続性は用いていないことに注意しよう．

2　連鎖律

勾配ベクトル：f を $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ のまわりで定義された偏微分可能な関数とする．$\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})=(\partial_1 f(\boldsymbol{x}),\partial_2 f(\boldsymbol{x}))$$

を f の $\boldsymbol{x}$ での勾配ベクトル，あるいはグラディエントとよぶ．

連鎖律：f を $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ のまわり U で定義された全微分可能な関数とする．γ が $t_0\in\mathbb{R}$ のまわり I で定義された微分可能な関数（注：$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ が $t=t_0$ で微分可能とは，γ_1,γ_2 がともに $t=t_0$ で微分可能なことと定義され，このとき $\gamma'(t_0)=(\gamma_1'(t_0),\gamma_2'(t_0))$ と定義する）で，$\forall t\in I, \gamma(t)\in U$ であれば，合成関数 $f\circ\gamma$ も I で微分可能で

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t))|_{t=t_0}=\operatorname{grad} f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0).$$

連鎖律の系 1：f を $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ のまわり U で定義された全微分可能な関数とする．$\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$ について，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$ を結ぶ線分が U に含まれるとき

$$0<\exists\theta<1, f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{h}.$$

（証明）$\gamma:[0,1]\to U, t\mapsto\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}$ として，$g=f\circ\gamma$ を考える．連鎖律より g は $(0,1)$ で微分可能で，$\forall t\in(0,1), g'(t)=\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{h}$ である．g に平均値の定理を適用して，$0<\exists\theta<1, g(1)-g(0)=g'(\theta)$ だが，これを書き直したものが主張そのものである．

方向微分：f を $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ のまわりで定義された関数とする．$|u|=1$ なるベクトル $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2$ について

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x})}{h}$$

が存在するとき，これを $\boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{u}$ 向きの f の方向微分とよび $\partial_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})$ とかく．

連鎖律の系 2：f を $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ のまわり U で定義された全微分可能な関数とする．このとき $|u|=1$ なる任意のベクトル $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^2$ について，$\partial_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})$ が存在し

$$\partial_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{x})=\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}.$$

3 練習問題

(A1) 前ページの「証明の要点」の残りを完成せよ．

(A2) 次の方程式を求めよ．

1. 曲面 $z = x^2 + y^2$ の点 $(1, 2, 5)$ における接平面
2. 曲面 $z^2 = xy$ の点 $(1, 4, 2)$ における接平面

(A3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ として

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + xy + y^2) \log(x^2 + y^2) & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

を考える．これが $\mathbf{0}$ で微分可能かどうか調べよ．

(A4) f は $\boldsymbol{x}$ のまわり U で定義されており，偏微分可能で，偏微分は U で有界（i.e.,$\forall i = 1, 2, \exists K_i > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U, |\partial_i f(\boldsymbol{x})| < K_i$）とする．$f$ は $\boldsymbol{x}$ で連続であることを示せ．

(A5) 単に偏微分可能なだけでは，全微分可能性は従わない．たとえば $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は，次のようなものである：

- f は $\mathbf{0}$ で偏微分可能
- f は $\mathbf{0}$ で連続ではない（ので，全微分不可能である）

この他に，次のような関数 f が欲しい：

- f は $\mathbf{0}$ で連続でかつ偏微分可能
- f は $\mathbf{0}$ で全微分可能ではない

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ として

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

を考えると，そのような例になっていることを示せ．

(A6) 開集合や閉集合に関連して，以下を示せ：

1. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ と $r > 0$ について，開円盤 $U(\boldsymbol{x}; r) \subseteq \mathbb{R}^2$ は開集合である（自明ではない！）
2. $\mathbb{R}^2$ の列 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を考え，$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$ であるとする．今，閉集合 $C \subseteq \mathbb{R}^2$ について $\forall n \geq 1, \boldsymbol{a}_n \in C$ となっているとすると，$\boldsymbol{a} \in C$ を示せ．

4 練習問題

(B1) 以下の f について $\operatorname{grad} f$ を求めよ．

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = ax + by + c$
3. $f(x,y) = xy(x+y-3)$

(B2) 以下の f について，指定された点と向きにおける方向微分を求めよ．

1. $f(x,y) = x^2 y$，点 $(2,-1)$，向き $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
2. $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$，点 $(-1,1)$，向き $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$
3. $f(x,y) = (x+y)^2$，点 $(2,2)$，向きは最大増加の向き

(B3) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ を微分可能とする．$f(x,y)$ を極座標で $g(r,\theta)$ と書いたとき：

1. $(\partial_r g)^2 + (\partial_\theta g/r)^2 = (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2$.
2. f が C^1級 ならば g は微分可能
3. 「f が微分可能ならば g は微分可能」は正しいかどうか調べよ（おまけ）

(B4) f は $U(\mathbf{0};1) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| < 1\}$ で定義された微分可能な関数とする．$\forall \boldsymbol{x} \in U(\mathbf{0};1), \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ ならば，f は $U(\mathbf{0};1)$ で定数であることを示せ．

(B5) (A5) において，方向微分を考えることで，f が $\mathbf{0}$ で全微分可能でないことを示せ．

(B6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, f(t\boldsymbol{x}) = t^m f(\boldsymbol{x})$$

となるとき，m 次同次関数とよばれる（簡単のため $m \geq 1$ は自然数とする）．f が微分可能であれば $x_1\partial_1 f + x_2\partial_2 f = mf$ を示せ．

(B7) 以下の $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は，全微分可能だが，C^1 級でないことを示せ（注：(A5) と合わせると，「C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能」の $\Rightarrow$ はどれも逆向きはいえないことがわかる）．

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2-xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(A1) $\Delta(h,k)=f(x+h,y+k)-f(x,y)-\partial_x f(x,y)h-\partial_y f(x,y)k$ として，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\Delta(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}=0$ を示せばよい．「証明の要点」より

$$0<\exists\theta_1,\exists\theta_2<1,\Delta(h,k)=(\partial_x f(x+\theta_1 h,y)-\partial_x f(x,y))h+(\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)-\partial_y f(x,y))k$$

なので，三角不等式より

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\le |\partial_x f(x+\theta_1 h,y)-\partial_x f(x,y)|\cdot\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}+|\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)-\partial_y f(x,y)|\cdot\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &\le |\partial_x f(x+\theta_1 h,y)-\partial_x f(x,y)|+|\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)-\partial_y f(x,y)|.\end{aligned}$$

$(h,k)\to(0,0)$ のとき，$\theta_1 h\to 0,\theta_2 k\to 0$ で $\partial_x f,\partial_y f$ は $\boldsymbol{x}$ で連続だから，$\partial_x f(x+\theta_1 h,y)\to\partial_x f(x,y),\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)\to\partial_y f(x,y)$．よって $\Delta(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ がわかった．

(A2) 1. $\partial_x z=2x,\partial_y z=2y$ より，$z=5+2(x-1)+4(y-2)$．

2. $z=\pm\sqrt{xy}$ であるが，今問題になっているのは $z=\sqrt{xy}$ のほうなので，$\partial_x z=\sqrt{y/x}/2,\partial_y z=\sqrt{x/y}/2$ である．よって $z=2+(x-1)+(y-4)/4$．

(A3) 微分可能である．$\displaystyle\lim_{h\to+0}h\log h=0$（詳細略）に注意すると，$\displaystyle\partial_x f(\mathbf{0})=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\log(h^2)}{h}=0=\partial_y f(\mathbf{0})$．さらに $f(\mathbf{0})=0$ なので，$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}f(\boldsymbol{h})/|\boldsymbol{h}|=0$ を示せばよい．$\boldsymbol{h}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと（$r>0,0\le\theta<2\pi$），$x^2+y^2=r^2,xy\le r^2$ より，$|f(\boldsymbol{h})/|\boldsymbol{h}||\le 2r^2\log(r^2)/r=4r\log r$．$\boldsymbol{h}\to 0$ は $r\to+0$ と同値なので，$\boldsymbol{h}\to 0$ とすると $f(\boldsymbol{h})/|\boldsymbol{h}|\to 0$ となる．

(A4) $K=\max\{K_1,K_2\},\Delta(h,k)=f(x+h,y+k)-f(x,y)$ とする．「証明の要点」より

$$0<\exists\theta_1,\exists\theta_2<1,\Delta(h,k)=\partial_x f(x+\theta_1 h,y)h+\partial_y f(x+h,y+\theta_2 k)k$$

なので，三角不等式より $|\Delta(h,k)|\le K(|h|+|k|)$．よって $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\Delta(h,k)=0$ をえる．

(A5) $(x,y)\ne(0,0)$ であれば $\partial_x f=x^2(x^2+3y^2)/(x^2+y^2)^2,\partial_y f=-2x^3y/(x^2+y^2)^2$ はやさしい．$h\ne 0$ のとき $f(h,0)=h,f(0,h)=0$ から，$\partial_x f((0,0))=1,\partial_y f((0,0))=0$ もわかる．したがって f は偏微分可能である．$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ とすると（$r>0$），$|\partial_x f|=|\cos^2\theta||1+2\sin^2\theta|\le 3,|\partial_y f|=|-2\cos^3\theta\sin\theta|\le 2$ より，$\partial_x f,\partial_y f$ は $\mathbb{R}^2$ で有界である．よって (A4) が適用できて（$\boldsymbol{x}=\mathbf{0},U=\mathbb{R}^2$ とする），f は $\mathbf{0}$ で連続であることが従う．f が $(0,0)$ で全微分可能でないことをいうには，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}(f(h,k)-h)/\sqrt{h^2+k^2}=0$「でないこと」を言えばよい．$(h,k)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とすると，$(f(h,k)-h)/\sqrt{h^2+k^2}=-\cos\theta\sin^2\theta$ なので，これは $r\to 0$ としても θ に依るので，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}(f(h,k)-h)/\sqrt{h^2+k^2}$ は存在しない．

(A6) 1. $\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{x};r)$ について，$\exists r'>0,U(\boldsymbol{y};r')\subseteq U(\boldsymbol{x};r)$ を示せばよい．そのためには $r'=r-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ ととれることを示せば十分である（$\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{x};r)$ なので $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r$ より $r'>0$ に注意）．そのためには，任意の $\boldsymbol{z}\in U(\boldsymbol{y};r')$ について，$\boldsymbol{z}\in U(\boldsymbol{x};r)$ であることを言えばよく，つまり $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|<r$ を言えばよい．三角不等式より

$$|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|\le|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r'+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=r$$

と，望みどおり示された．

2. $\boldsymbol{a} = (x, y), \boldsymbol{a}_i = (x_i, y_i)$ とする．$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ とすると，$\mathbb{R}^2 \setminus C$ は開集合だから $\exists r > 0, U(\boldsymbol{a}; r) \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus C)$．一方で $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$ なので，$\exists N > 0, \forall n > N, |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| < r$．これは $n > N$ ならば $\boldsymbol{a}_n \in U(\boldsymbol{a}; r) \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus C)$ を導き，$\forall n \geq 1, \boldsymbol{a}_n \in C$ に矛盾する．

(B1)
1. $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$.
2. $\operatorname{grad} f = (a, b)$.
3. $\operatorname{grad} f = (y(2x + y - 3), x(x + 2y - 3))$.

(B2) f が微分可能であることの確認は省略する．
1. $\operatorname{grad} f = (2xy, x^2)$ より $\operatorname{grad} f(2, -1) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 0$.
2. $\operatorname{grad} f = (x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$ より $\operatorname{grad} f(-1, 1) \cdot (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 1/2\sqrt{5}$.
3. $\operatorname{grad} f = (2(x + y), 2(x + y))$ より $\operatorname{grad} f(2, 2) = (8, 8)$ で，最大増加の向きはこの向きなので向きは $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$．この向きの方向微分は $(8, 8) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$.

(B3)
1. 連鎖律を適用すると，$\partial_r g = \operatorname{grad} f(x, y) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)$．同様に $\partial_\theta g = \operatorname{grad} f(x, y) \cdot (-r\sin\theta, r\cos\theta)$．よって
$$(\partial_r g)^2 + (\partial_\theta g/r)^2 = (\partial_x f \cos\theta + \partial_y f \sin\theta)^2 + (-\partial_x f \sin\theta + \partial_y f \cos\theta)^2 = (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2.$$
2. $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ は連続なので，f が C^1 級ならば $g(r, \theta)$ は C^1 級である．よって g は微分可能である．

(B4) 任意の $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{0}; 1)$ について，$\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ線分は $U(\boldsymbol{0}; 1)$ に含まれることに注意しておく．連鎖律の系 1 より $0 < \exists\theta < 1, f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0}) = \operatorname{grad} f'(\theta\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので，$\forall\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{0}; 1), f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{0})$ が示された．

(B5) 方向微分の向き $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ を固定する（$u_1^2 + u_2^2 = 1$）．$f(h\boldsymbol{u}) = hu_1^3$ より（ちなみにこれは $h = 0$ でも正しい），$\partial_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{0}) = u_1^3$ である．もしも f が微分可能とすると，$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{0}) = (1, 0)$ より（これは $\boldsymbol{u} = (1, 0), (0, 1)$ のときをそれぞれ考えるとえられる），連鎖律の系 2 より $\partial_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{0}) = (1, 0) \cdot (u_1, u_2) = u_1$ となる．よって矛盾が生じた．

(B6) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を固定して，$f(t\boldsymbol{x}) = t^m f(\boldsymbol{x})$ を t で微分すると，$\operatorname{grad} f(t\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = mt^{m-1} f(\boldsymbol{x})$ なので $t = 1$ とすると $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = mf(\boldsymbol{x})$．つまり $x_1\partial_1 f + x_2\partial_2 f - mf = 0$.

(B7) $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ で f は C^1 級である．実際
$$\partial_1 f = (2x + y)\sin\frac{1}{x^2 - xy + y^2} - \frac{2x - y}{(x^2 - xy + y^2)^2}(x^2 + xy + y^2)\cos\frac{1}{x^2 - xy + y^2},$$
$$\partial_2 f = (x + 2y)\sin\frac{1}{x^2 - xy + y^2} - \frac{2y - x}{(x^2 - xy + y^2)^2}(x^2 + xy + y^2)\cos\frac{1}{x^2 - xy + y^2}$$
となっていて，これらは連続である．よって f は U で全微分可能である．

次に f は $\boldsymbol{0}$ で全微分可能なことを示そう（これは f が $\boldsymbol{0}$ で偏微分可能なことを導く）．このためには $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y)|/\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ をいえばよい（これは $\partial_1 f(0, 0) = 0 = \partial_2 f(0, 0)$

を導く）．実際，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると

$$|f(x,y)|/\sqrt{x^2+y^2} = \left| r(1+\cos\theta\sin\theta)\sin\frac{1}{r^2(1-\cos\theta\sin\theta)} \right| \leq 2r$$

なので $r \to 0$（すなわち $(x,y) \to (0,0)$）のとき $f(x,y) \to 0$ となる．
以上で f が $\mathbb{R}^2$ で全微分可能なことがいえた．f が C^1 級でないことをいうには $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_1 f(x,y) \neq 0$ をいえば十分である．今 $\partial_1 f(h,h) = 3h\sin\frac{1}{h^2} - \frac{3}{h}\cos\frac{1}{h^2}$ より $\displaystyle\lim_{h\to 0} \partial_1 f(h,h)$ は存在しない．よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_1 f(x,y)$ も存在しない．