1 陰関数定理

弧状連結：$\mathbb{R}^2$ の部分集合 S が弧状連結とは，任意の $a, b \in S$ について，連続関数 $\gamma : [0, 1] \to S$ であって，$\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ なるものが存在することをいう．

領域：$\mathbb{R}^2$ の弧状連結な開集合は領域とよばれる．

（注）2 変数関数の解析学を展開する場合，領域で定義された関数を考えるのが普通だが，開集合でも成り立つ定理（例えば陰関数定理）と，領域で成り立つ定理（例えば平均値の定理）がある．

陰関数：$\mathbb{R}^2$ の部分集合 S で定義された関数 $f : S \to \mathbb{R}$ を考える．$x = x_0$ のまわり I で定義された関数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ であって

$$\forall x \in I, (x, \varphi(x)) \in S \text{ かつ } f(x, \varphi(x)) = 0$$

なるものを，$(x_0, \varphi(x_0))$ を通る $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数（の一つ）という（普通は「φ は連続」などの「良い条件」が課される）．

陰関数定理：

$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された C^1 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を考える．$(a, b) \in U$ が，条件

- $f(a, b) = 0$
- $\partial_2 f(a, b) \neq 0$

を満たすとき，(a, b) を通る $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数が存在する．より正確に言うと，ある $\delta > 0$ が存在して，次が成り立つ：

1. 以下を満たす連続関数 $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$ がただ一つ存在する：
   - $\forall x \in (a - \delta, a + \delta), (x, \varphi(x)) \in U,$
   - $\forall x \in (a - \delta, a + \delta), f(x, \varphi(x)) = 0,$
   - $\varphi(a) = b.$
2. さらに φ は C^1 級で，微分係数について以下が成り立つ

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta), \varphi'(x) = -\partial_1 f(x, \varphi(x))/\partial_2 f(x, \varphi(x)).$$

2 ラグランジュ未定乗数法

極大：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を考える．$\boldsymbol{a} \in U$ で f が極大（点）であるとは

$$\exists r > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}; r), f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x}).$$

（注）$U(\boldsymbol{a}; r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < r\}$ は，中心 $\boldsymbol{a}$ で半径 r の開円盤である．極小も同様に定義される．極大・極小になる点を極値（点）とよぶ．

極値の候補：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f : U \to \mathbb{R}$ について，$\boldsymbol{a} \in U$ が f の極値点になっているとする．$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$ が存在するならば，$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．

条件付き極大：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を考え，さらに束縛条件を与える $g : U \to \mathbb{R}$ も考える．$\boldsymbol{a} \in U$ が束縛条件 $g = 0$ での極大（点）であるとは（$g(\boldsymbol{a}) = 0$ かつ）

$$\exists r > 0, \forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{a}; r), (g(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})).$$

ラグランジュ未定乗数法：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数 $f, g : U \to \mathbb{R}$ について，

- f は全微分可能
- g は C^1 級

と仮定する（面倒なので，両方とも C^1 級とされることが多い）．さらに

- $\boldsymbol{a} \in U$ が束縛条件 $g = 0$ での極値
- $\operatorname{grad} g(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$

ならば，$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{grad} g(\boldsymbol{a})$．（$\lambda$ は Lagrange 未定乗数（multiplier）とよばれる）

（注）束縛条件下で極値を求めようとするならば，$g(x, y) = 0$ から x または y を消去して，問題を「小さく」しようとするのが自然な考えである．しかしラグランジュ未定乗数法では，いったん変数 λ を足して，問題を難しくしているようで興味深い（「量子力学的な」正当化もあるそうです）．

3　2 変数のテイラー展開（おまけ）

高階偏微分：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について，高階偏微分が $\partial_1 \partial_2 f = \partial_1(\partial_2 f)$ といった具合に定義される（存在するならば）．∂_* の個数を，この高階偏微分の階数とよぶ（$\partial_1 \partial_2$ は 2 階）．$\partial_1 \partial_2$ などを「関数についてその高階偏微分を返す対応」とみなし，微分作用素とよぶことがある．

C^n 級：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について，すべての n 階の偏微分が存在し，かつ連続のとき，f は U で C^n 級という．

偏微分の交換可能性：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について，f が C^2 級ならば $\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$．

（注）これから例えば C^3 級の f について，$\partial_1 \partial_2 \partial_1 f = \partial_1 \partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 \partial_1 f$ といったことも従う．

2 変数のテイラーの定理：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された C^n 級関数 f を考える．$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \boldsymbol{h} = (s, t)$ について，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}$ を結ぶ線分が U に含まれるとき

$$\begin{aligned} 0 < \exists \theta < 1, f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) &+ (s\partial_1 + t\partial_2) f(\boldsymbol{a}) + (s\partial_1 + t\partial_2)^2 f(\boldsymbol{a})/2! \\ &+ \cdots + (s\partial_1 + t\partial_2)^{n-1} f(\boldsymbol{a})/(n-1)! + (s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\boldsymbol{a} + \theta \boldsymbol{h})/n! \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $(s\partial_1 + t\partial_2)^m f(\boldsymbol{a})$ は $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (\partial_1^k \partial_2^{m-k} f(\boldsymbol{a})) s^k t^{m-k}$ の意味である．微分作用素として $(s\partial_1 + t\partial_2)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} s^k t^{m-k} \partial_1^k \partial_2^{m-k}$ と思うとよいだろう．

(A1) 次の関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ について，$f(x,y)=0$ は与えられた (a,b) を通り $f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつことを示し，$\varphi'(a)$ を求めよ．

1. $f(x,y)=x^2+xy-y^2+x$, $(a,b)=(1,2)$
2. $f(x,y)=y+\cos(xy)$, $(a,b)=(\pi,1)$
3. $f(x,y)=xe^{xy}-x^2$, $(a,b)=(1,0)$

(A2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto y^5+16y-32x^3+32x$ について，

1. $\forall x\in\mathbb{R}, \exists! y\in\mathbb{R}, f(x,y)=0$ を示せ．これで陰関数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto y$ が定まる．
2. φ は C^1 級であることを示し，$\varphi'(x)=0$ となる x を求めよ．

(A3) $\mathbb{R}^2$ の点 (x,y) が円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くとき，

1. xy の極値を求めよ．
2. $x+y$ の極値を求めよ．

(A4) 束縛条件 $ax+by=k$ のもとで，x^2+y^2 の最小値を求めたい（ここで $(a,b)\neq(0,0), k\neq 0$）．

1. とりあえずラグランジュの未定乗数法を適用してみよ．
2. それが本当に最小値であるかどうか考察せよ．

(A5)
1. 以下の証明の誤りを指摘せよ：

   1 は最大の自然数である．実際，最大の自然数を M とすると，$M\geq 1$ だが（$\because$1 は自然数），M^2 も自然数なので $M\geq M^2$ が従う．よって $1\geq M$ である．■

2. 周長が一定の三角形のうち，面積が最大になるものは正三角形であることを示したい（注：このような三角形が存在することは自明ではない）．とりあえずラグランジュの未定乗数法を試みよ．

(A6) t に依存する x の 5 次多項式

$$h_t(x)=x^5-(\sin t)x^4+(1-\cos t)x^3+(\log(1+t))x^2+(\tan t)x-1$$

を考える．思考実験

> $t=0$ のとき $h_0(x)=x^5-1$ は $x=1$ を解にもつ（当たり前）．t が 0 のまわりを動くとき，5 次多項式 $h_t(x)$ の係数はなめらかに変化するので，$t=0$ での解 $x_1(0)=1$ も近くの解 $x_1(t)$ になめらかに変化するはずである．

によって，以下が期待される．

$(*)$ $\exists\delta>0, \exists! x_1:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}: C^1$ 級関数 such that $\boxed{}$.

1. 空欄を埋めよ．
2. $(*)$ を認めて $x_1'(0)$ を求めよ．
3. $(*)$ を示せ．

(A7) $g(x,y)=(y^4-y^6)-3(x^2+x^4)$ とおく．以下の問に答えよ（東大数理の院試より）．

1. $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid g(x,y)=g_x(x,y)=g_y(x,y)=0\}$ を求めよ．
2. 曲線 $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus S\mid g(x,y)=0, y>0\}$ 上で $f(x,y)=x^2+y^2$ が極値をとる点をすべて求め，その値が極大であるか極小であるかを判定せよ．

(B1) 以下の f について $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1\partial_1 f, \partial_1\partial_2 f, \partial_2\partial_1 f, \partial_2\partial_2 f$ を求めよ．

1. $f(x,y) = xe^{xy}$
2. $f(x,y) = \log(1+2x+3y)$

(B2) 以下の $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について：

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f は C^1 級であることを示せ．
2. $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)$ を示せ．

(B3) $f(\boldsymbol{a}) + (x\partial_1 + y\partial_2)f(\boldsymbol{a}) + (x\partial_1 + y\partial_2)^2 f(\boldsymbol{a})/2! + \cdots + (x\partial_1 + y\partial_2)^n f(\boldsymbol{a})/n!$ を $\boldsymbol{a}$ における f の n 次テイラー多項式とよぶ．以下の f の $\mathbf{0}$ における 3 次テイラー多項式を求めよ．

1. $f(x,y) = \sin(xy)$
2. $f(x,y) = 1/\sqrt{(1+x)(1+y)}$

(B4) 6 月 19 日の演習問題 (A5) は以下のようなものであった：

$x = a$ のまわり $U(\subseteq \mathbb{R})$ で定義された n 回微分可能な関数 f について，以下の関数を考える（これは $U \setminus \{a\}$ で定義されている）．

$$H(x) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) / (x-a)^n.$$

1. $f^{(n)}$ が連続であれば $\lim_{x \to a} H(x) = 0$ を示せ．
2. 「$f^{(n)}$ が連続」という仮定を外し，単に「n 回微分可能」のとき，どうだろうか？

これを思い出しつつ，f を $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ のまわりで定義された C^n 級関数とするとき

$$\lim_{\boldsymbol{h}=(s,t)\to(0,0)} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \sum_{k=0}^{n}(s\partial_1 + t\partial_2)^k f(\boldsymbol{a})/k!}{\sqrt{s^2+t^2}^{\,n}} = 0.$$

(B5) 偏微分の交換可能性について，実際は以下のことが成り立つ：

> $f : U \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数で，U において $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_2\partial_1 f$ が存在し，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ において $\partial_2\partial_1 f$ は連続とする．このとき $\partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a})$ も存在し，$\partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a}) = \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a})$ である．

よくある証明は以下のとおりである：

1. $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ を（小さく）とり，$(a_1, a_2), (a_1+h_1, a_2), (a_1, a_2+h_2), (a_1+h_1, a_2+h_2)$ を頂点とする長方形 Q が U に含まれるとする（U が開集合という仮定より $\boldsymbol{h}$ を小さくとれば可能である）．

$$\Delta := f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2)$$

について，Q の内部（つまり Q の境界以外）に $\Delta = h_1 h_2 \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{s})$ を満たす点 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2)$ が存在することを示せ．

2. 冒頭に挙げた命題を証明せよ．

(A1) 1. f は C^∞ 級で $f(1,2) = 0, \partial_2 f(1,2) = -3$ なので陰関数定理が使える．$\varphi'(a) = -\partial_1 f(a,b)/\partial_2 f(a,b) = 5/3$

2. 上と同様である．$\varphi'(a) = -\partial_1 f(a,b)/\partial_2 f(a,b) = 0.$

3. 上と同様である．$\varphi'(a) = -\partial_1 f(a,b)/\partial_2 f(a,b) = 1.$

(A2) 1. 固定された x について，$g(y) = f(x,y)$ とすると，$\lim_{y\to\pm\infty} g(y) = \pm\infty$ で（$g(y)$ の主要項が y^5 だから．厳密な証明はお任せします）．よって中間値の定理より $\exists y \in \mathbb{R}, g(y) = 0(= f(x,y)$ だが，$g'(y) = 5y^4 + 16 > 0$ より g は狭義単調増加関数なので，この y はただ 1 つである．

2. $\partial_2 f(x,y) = 5y^4 + 16 \neq 0$ より，任意の $x \in \mathbb{R}$ について $(x, \varphi(x))$ を通り $f = 0$ で定まる C^1 級の陰関数 ϕ が存在する．1 より，ϕ は φ の制限である．よって φ は C^1 級で，$\varphi'(x) = \phi'(x) = -\partial_1 f(x,y)/\partial_2(x,y) = (96x^2 - 32)/(5y^4 + 16)$（ここで $y = \varphi(x)$）．よって $x = \pm 1/\sqrt{3}$ で $\varphi'(x) = 0$ となる．

(A3) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ とすると，$g = 0$ では $\operatorname{grad} g = (2x, 2y) \neq \mathbf{0}$ であることに注意する．

1. $f(x,y) = xy$ とする．連立方程式 $g(x,y) = 0, \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ を解く．すなわち $x^2 + y^2 - 1 = 0, y = 2\lambda x, x = 2\lambda y$．これより $\lambda = \pm 1/2$ で $(x,y) = (\varepsilon_1/\sqrt{2}, \varepsilon_2/\sqrt{2})$ と求まる（$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$）．これらが本当に極値であることの考察はお任せします．

2. $f(x,y) = x + y$ とする．連立方程式 $g(x,y) = 0, \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ を解く．すなわち $x^2 + y^2 - 1 = 0, 1 = 2\lambda x, 1 = 2\lambda y$．これより $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$ で $(x,y) = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ と求まる．これらが本当に極値であることの考察はお任せします．

(A4) 1. $f(x,y) = x^2 + y^2, g(x,y) = ax + by - k$ とし，連立方程式 $g(x,y) = 0, \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ を解く．すなわち $ax + by = k, 2x = a\lambda, 2y = b\lambda$．よって $x = a\lambda/2, y = b\lambda/2$．ゆえに $\lambda = 2k/(a^2 + b^2)$ なので $x = ak/(a^2 + b^2), y = bk/(a^2 + b^2)$．これから $x^2 + y^2 = k^2/(a^2 + b^2)$ が最小値の候補としてもとまった．

2.「求めるものは直線 $ax + by = k$ へ原点 $(0,0)$ から下した垂線の長さの 2 乗である」と解釈すれば，厳密ではないかもしれませんが図形的に考察可能です（他の方法もあるでしょう）．

(A5) 1.「最大の自然数 M」の存在を仮定して証明しているが，この仮定は正しくない．

2. 周長を $2s$ とする．三角形の 3 辺の長さを x, y, z とすると，$x + y + z = 2s$ という束縛条件のもと（本当はさらに $0 < x, y, z < 2s$），$S^2/s = (s-x)(s-y)(s-z)$（S は三角形の面積でヘロンの公式を用いた）を最大化する問題と翻訳される．連立方程式

$$x + y + z = 2s, \quad -(s-y)(s-z) = \lambda, \quad -(s-x)(s-z) = \lambda, \quad -(s-x)(s-y) = \lambda$$

を解く．$0 < x, y, z < 2s$ を仮定すると $x = y = z = 2s/3$（正三角形）が得られる．これが答えであることを示すには「有界閉集合上の連続関数には最大値が存在する」などのおまじないが必要になるでしょう（現段階ではおそらく不可能です）．

(A6) 1. $x_1(0) = 1$ かつ $\forall t \in (-\delta, \delta), h_t(x_1(t)) = 0$

2. $x_1(t)^5 - (\sin t)x_1(t)^4 + (1 - \cos t)x_1(t)^3 + (\log(1+t))x_1(t)^2 + (\tan t)x_1(t) - 1 = 0$

を t で微分して

$$5x_1'(t)x_1(t)^4 - 4(\sin t)x_1'(t)x_1(t)^3 - (\cos t)x_1(t)^4 + 3(1-\cos t)x_1'(t)x_1(t)^2 + (\sin t)x_1(t)^3$$
$$+ 2(\log(1+t))x_1'(t)x_1(t) + x_1(t)^2/(1+t) + (\tan t)x_1'(t) + (1/\cos^2 t)x_1(t) = 0.$$

$t=0$ を代入すると $5x_1'(0) - 1 + 1 + 1 = 0$．よって $x_1'(0) = -1/5$ である．

3. 陰関数定理とは次のような主張であった：

   開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数と $(a,b) \in U$ について，$f(a,b) = 0, \partial_2 f(a,b) \neq 0$ ならば $\exists\delta > 0, \exists!\varphi : (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R} : C^1$ 級関数 such that $\varphi(a) = b$ かつ $\forall t \in (a-\delta, a+\delta), f(t, \varphi(t)) = 0$（このときさらに $\forall t \in (a-\delta, a+\delta), \varphi'(t) = -\partial_1 f(t,\varphi(t))/\partial_2 f(t,\varphi(t))$）．

   今 $U = \mathbb{R} \times (-1,1) = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ 上で $f(u,v) = h_u(v)$ とすると f は C^1 級（実際は C^∞ 級），$f(0,1) = 0, \partial_2 f(0,1) = 5 \cdot 1^4 = 5 \neq 0$ となっているので陰関数定理が適用でき

   $$\exists\delta > 0, \exists!\varphi : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R} : C^1 \text{ 級関数 such that } \varphi(0) = 1 \text{ かつ } \forall t \in (-\delta,\delta), f(t,\varphi(t)) = 0.$$

   $f(t,\varphi(t)) = h_t(\varphi(t))$ なので，$x_1 = \varphi$ とすれば証明したい主張をえる．

(A7) 1. $g_x = -6x(1+2x^2), g_y = 2y(2y^2 - 3y^4)$ である．$g = g_x = g_y = 0$ とすると，$g_x = 0$ より $x = 0$ なので，$g = y^4(1-y^2) = 0$．これと $g_y = 0$ より $y = 0$ がえられる．よって $S = \{(0,0)\}$．

2. $U(\boldsymbol{x}; r) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < r\}$ とする．$\boldsymbol{a} \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ が A で $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の極大（resp. 極小）点とは，$\exists\delta > 0, \forall\boldsymbol{x} \in A \cap U(\boldsymbol{a};\delta), f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})$（resp. $f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{x})$）であった．

   まず $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ で $f(x,y)$ が極大・極小となる点の候補を求める．ラグランジュ未定乗数法より $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g, g = 0$ を解けばよい．すなわち

   $$y^4 - y^6 = 3(x^2 + x^4), \quad (2x, 2y) = \lambda(-6x(1+2x^2), 2y(2y^2 - 3y^4))$$

   である．以下 $xy = 0$ であることを示す．$xy \neq 0$ とすると $1 + 3\lambda(1+2x^2) = 0, 1 - \lambda(2y^2 - 3y^4) = 0$ なので，$\lambda = 1/(2y^2 - 3y^4)$ から $2y^2 - 3y^4 + 3(1+2x^2) = 0$ がえられる．よって $6x^2 = 3y^4 - 2y^2 - 3$．ゆえに $y^4 - y^6 = \left(\dfrac{3y^4 - 2y^2 - 3}{2}\right)\left(1 + \dfrac{3y^4 - 2y^2 - 3}{6}\right)$ となって $9y^8 - 8y^4 - 9 = 0$ をえるが，この解は明らかに $|y| > 1$ なので $3(x^2 + x^4) = y^4 - y^6 < 0$ となって矛盾が生じる．$\therefore xy = 0$．

   $x = 0$ とすると $y = \pm 1$ が，$y = 0$ とすると $x = 0$ がえられる．D で $f(0, \pm 1)$ は極大になることを示す．いま $g_y \neq 0$ より，陰関数定理から「$\exists\delta > 0, \exists\varphi : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ s.t.$\varphi(0) = \pm 1, \forall x \in (-\delta,\delta), g(x,\varphi(x)) = 0$, $\varphi'(x) = -g_x/g_y = 3x(1+2x^2)/y(2y^2 - 3y^4)$」となる．これより

   $$f'(x,\varphi(x)) = 2(x + \varphi(x)\varphi'(x)) = 2\left(x + \frac{3x(1+2x^2)}{2\varphi(x)^2 - 3\varphi(x)^4}\right).$$

だが，$\dfrac{3x(1+2x^2)}{2\varphi(x)^2-3\varphi(x)^4}$ は原点の近傍では $-3x$ のようにふるまうので，$f'(x,\varphi(x))$ は $x=0$ で符号が $-$ から $+$ に変わる．これは $f(0,\pm 1)(=1)$ が（狭義の）極大であることを示している．

$\forall \boldsymbol{a}\in C, \exists r>0, C\cap U(\boldsymbol{a};r)=D\cap U(\boldsymbol{a};r)$ が成り立つので，C での極値点は D の極値点である．これから求める極値点は $(0,1)\in C$ で，ここで f は極大になる．

(B1) 1. $\partial_1 f=e^{xy}+xye^{xy}$, $\partial_2 f=x^2e^{xy}, \partial_1\partial_1 f=2ye^{xy}+xy^2e^{xy}$, $\partial_2\partial_2 f=x^3e^{xy}$, $\partial_1\partial_2 f=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}=\partial_2\partial_1 f$.

2. $\partial_1 f=2/(1+2x+3y)$, $\partial_2 f=3/(1+2x+3y)$, $\partial_1\partial_1 f=-4/(1+2x+3y)^2$, $\partial_2\partial_2 f=-9/(1+2x+3y)^2$, $\partial_1\partial_2 f=-6/(1+2x+3y)^2=\partial_2\partial_1 f$.

(B2) 1. $(x,y)\neq(0,0)$ のとき，

$$\partial_1 f(x,y)=\frac{(y(x^2-y^2)+2x^2y)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_2 f(x,y)=\frac{(x(x^2-y^2)-2x^2y)(x^2+y^2)-2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

また

$$\partial_1 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,\quad \partial_2 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

である．$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_1 f(x,y)=0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_2 f(x,y)$ をいえばよいが，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと

$$|\partial_1 f(x,y)|\le 6r,\quad |\partial_2 f(x,y)|\le 6r$$

となるので，$r\to 0$ のとき $\partial_1 f(x,y)\to 0$ かつ $\partial_2 f(x,y)\to 0$ となる．

2. $\partial_1\partial_2 f(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\partial_2 f(h,0)}{h}=1$, $\partial_2\partial_1 f(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\partial_1 f(0,h)}{h}=-1$ となっている．

(B3) 明示的に書くと，以下が求める多項式である．

$$f(\mathbf{0})+\partial_1 f(\mathbf{0})x+\partial_2 f(\mathbf{0})y+\frac{\partial_1^2 f(\mathbf{0})}{2}x^2+\partial_1\partial_2 f(\mathbf{0})xy+\frac{\partial_2^2 f(\mathbf{0})}{2}y^2$$
$$+\frac{\partial_1^3 f(\mathbf{0})}{6}x^3+\frac{\partial_1^2\partial_2 f(\mathbf{0})}{2}x^2y+\frac{\partial_1\partial_2^2 f(\mathbf{0})}{2}xy^2+\frac{\partial_2^3 f(\mathbf{0})}{6}y^3$$

1. xy
2. $1-(x+y)/2+(3x^2+2xy+3y^2)/8-(5x^3+3x^2y+3xy^2+5y^3)/16$

(B4) 2 変数のテイラーの定理より

$$0<\exists\theta<1, f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+(s\partial_1+t\partial_2)f(\boldsymbol{a})+(s\partial_1+t\partial_2)^2 f(\boldsymbol{a})/2!$$
$$+\cdots+(s\partial_1+t\partial_2)^{n-1}f(\boldsymbol{a})/(n-1)!+(s\partial_1+t\partial_2)^n f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})/n!.$$

よって求める極限は

$$\lim_{\boldsymbol{h}=(s,t)\to(0,0)} \frac{(s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}) - (s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\boldsymbol{a})}{n!\sqrt{s^2+t^2}^n}$$
$$= \lim_{\boldsymbol{h}=(s,t)\to(0,0)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{s^k}{\sqrt{s^2+t^2}^k} \frac{t^{n-k}}{\sqrt{s^2+t^2}^{n-k}} (\partial_1^k \partial_2^{n-k} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \partial_1^k \partial_2^{n-k} f(\boldsymbol{a}))$$

f は C^n 級なので $\partial_1^k \partial_2^{n-k} f$ は連続だから $\lim\limits_{\boldsymbol{h}=(s,t)\to(0,0)} \partial_1^k \partial_2^{n-k} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \partial_1^k \partial_2^{n-k} f(\boldsymbol{a}) = 0$ であり，$\left| \dfrac{1}{k!(n-k)!} \dfrac{s^k}{\sqrt{s^2+t^2}^k} \dfrac{t^{n-k}}{\sqrt{s^2+t^2}^{n-k}} \right| \leq 1$ より，求める極限は 0 である．

(B5) 1. $g(x) = f(x, a_2+h_2) - f(x, a_2)$ とすると $\Delta = g(a_1+h_1) - g(a_1)$ だが，g は微分可能なので（$\because g'(x) = \partial_1 f(x, a_2+h_2) - \partial_1 f(x, a_2)$．ここに $\partial_1 f$ の存在を用いた）平均値の定理より

$$\exists\theta \in (0,1), \Delta = h_1(\partial_1 f(a_1+\theta h_1, a_2+h_2) - \partial_1 f(a_1+\theta h_1, a_2)).$$

$h(y) = \partial_1 f(a_1+\theta h_1, y)$ に同じ考えを適用して（ここに $\partial_2\partial_1 f$ の存在を用いている）

$$\exists\theta' \in (0,1), \partial_1 f(a_1+\theta h_1, a_2+h_2) - \partial_1 f(a_1+\theta h_1, a_2) = h_2\partial_2\partial_1(a_1+\theta h_1, a_2+\theta' h_2).$$

まとめると $(s,t) = (a_1+\theta h_1, a_2+\theta' h_2)$ がもとめるものである．

2. $A = \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a})$ とする．$\partial_2\partial_1 f$ は $\boldsymbol{a}$ で連続なので

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall h_1, \forall h_2, (0 < |h_1|, |h_2| < \delta \Rightarrow |\partial_2\partial_1 f(a_1+h_1, a_2+h_2) - A| < \varepsilon).$$

1 より $\left| \dfrac{\Delta}{h_1 h_2} - A \right| < \varepsilon$ だが

$$\frac{\Delta}{h_1 h_2} = \frac{1}{h_1}\left(\frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2)}{h_2} - \frac{f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2)}{h_2} \right)$$

に注意する．h_1 を固定して $h_2 \to 0$ とすると

$$\left| \frac{\partial_2 f(a_1+h_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2)}{h_1} - A \right| \leq \varepsilon$$

をえる（ここに $\partial_2 f$ の存在を用いた）．これが任意の $0 < |h_1| < \delta$ について成り立つのだがら，定義より $\partial_1\partial_2 f(a_1, a_2) = A$ ということである．