$\boxed{1}$ $\sin 1 = 0.8414709848\cdots$ の近似値を，$1 - 1/3! + 1/5! - 1/7! + \cdots$ を打ち切ることで 50 桁程度の精度で求めたい．つまり $|\sin 1 - a_N| < 10^{-50}$ となるには N をどうとればよいか？ここで

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

（解答）テイラーの定理より $\exists\theta \in (0,1), |\sin 1 - a_n| = |\sin\theta|/(2n+2)! < 1/(2n+2)!$ となるので，$(2N+2)! > 10^{50}$ となる $N = 20$ ととればよい．

（コメント）階乗の評価には $n! > (n/e)^n$ などの不等式を用いてもよいでしょう．

$\boxed{2}$ 以下の $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は，全微分可能だが，C^1 級でないことを示せ．

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sin\frac{1}{x^2-xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

（解答）$U := \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ で f は C^1 級である．実際

$$\partial_1 f = (2x+y)\sin\frac{1}{x^2-xy+y^2} - \frac{2x-y}{(x^2-xy+y^2)^2}(x^2+xy+y^2)\cos\frac{1}{x^2-xy+y^2},$$
$$\partial_2 f = (x+2y)\sin\frac{1}{x^2-xy+y^2} - \frac{2y-x}{(x^2-xy+y^2)^2}(x^2+xy+y^2)\cos\frac{1}{x^2-xy+y^2}$$

となっていて，これらは連続である．よって f は U で全微分可能である．

次に f は $\mathbf{0}$ で全微分可能なことを示そう（これは f が $\mathbf{0}$ で偏微分可能なことを導く）．このためには $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)|/\sqrt{x^2+y^2} = 0$ をいえばよい（これは $\partial_1 f(0,0) = 0 = \partial_2 f(0,0)$ を導く）．実際，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると

$$|f(x,y)|/\sqrt{x^2+y^2} = \left| r(1+\cos\theta\sin\theta)\sin\frac{1}{r^2(1-\cos\theta\sin\theta)} \right| \leq 2r$$

なので $r \to 0$（すなわち $(x,y) \to (0,0)$）のとき $f(x,y) \to 0$ となる．

以上で f が $\mathbb{R}^2$ で全微分可能なことがいえた．f が C^1 級でないことをいうには $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_1 f(x,y) \neq 0$ をいえば十分である．今 $\partial_1 f(h,h) = 3h\sin\frac{1}{h^2} - \frac{3}{h}\cos\frac{1}{h^2}$ より $\lim_{h\to 0} \partial_1 f(h,h)$ は存在しない．よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_1 f(x,y)$ も存在しない．

（コメント）授業と合わせると「C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能」の $\Rightarrow$ はどれも逆向きはいえないことがわかりました．

$\boxed{3}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^3 級で，$\exists\alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$ とする．

(a) $\exists\delta > 0, \forall x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta), f(x) = 0 \Rightarrow x = \alpha$ を示せ．

(b) $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ にテイラーの定理を適用することで，以下を示せ：

$$\exists\delta' > 0, \exists C > 0, \forall x \in (\alpha-\delta', \alpha+\delta'), |g(x) - \alpha| \leq C|x-\alpha|^2$$

（解答）(a) $f'(\alpha) \gtrless 0$ とする．f は C^3 級なので，特に C^1 級なので，f' は連続である．よって $\exists\delta > 0, \forall x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta), f(x) \gtrless 0$ となる．（平均値の定理の系より）f は $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ で狭義単調増加 / 減少なので，$f(x) = 0$ となる $x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ は $x = \alpha$ に限る．

（解答）(b) g は $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ で C^2 級であることに注意しよう．これは

$$g' = \frac{ff''}{f'^2}, \quad g'' = \frac{(f'f'' + ff''')f'^2 - 2ff'f''^2}{f'^4}$$

で f が C^3 級だからである．特に $|g''|$ は $(a-\delta, a+\delta)$ で連続だから，$[a-\delta/2, a+\delta/2]$ で連続で，最大値 $D = \max_{x\in[a-\delta/2,a+\delta/2]} |g''(x)|$ を持つ（最大値の定理）．テイラーの定理より

$$\forall x \in (a-\delta/2, a+\delta/2), \exists\theta \in (0,1), g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x-\alpha) + g''(\theta(x-\alpha)+\alpha)(x-\alpha)^2$$

だが，$g(\alpha) = \alpha, g'(\alpha) = 0$ より $|g(x) - \alpha| \le D|x-\alpha|^2$．よって $\delta' = \delta/2, C = D+1$ ととれる．

（コメント）ニュートン法は「$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$ にさらに「良い条件」を仮定すると，反復過程 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ が 2 乗収束する」というものですが，授業・演習・レポートにおける「良い条件」は微妙に異なっていることに注意しましょう．どれも一長一短あると思います．

$\boxed{4}$ 微分可能な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考え，$g = f'$ とする．$a < b$ について $g(a) > 0 > g(b)$ のとき，$a < \exists c < b, g(c) = 0$ を示せ．

（解答）f は連続なので閉区間 $[a, b]$ で最大値 $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ をもつ．
　まず $f(a) < M$ に注意しよう．実際，f は $x = a$ で微分可能だから，特に

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = g(a) > 0$$

となるが，もしも $f(a) = M$ ならば $f(a+h) - f(a) \le 0$ より $g(a) \le 0$ となってしまう．同様に $f(b) < M$ もわかる．よって $\exists c \in (a, b), f(c) = M$ だが，この c について $g(c) = 0$ となる．実際，

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = g(c) \le 0, \quad \lim_{h\to+0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} = g(c) \ge 0$$

なので $g(c) = 0$ をえる．

（コメント）g は連続とは限らないが，中間値の定理をみたすということです．このように微分可能な関数 f を微分してえられる f' には何かしら制限があるはずですが，それについてはあまりわかっていないように思います．

$\boxed{5}$ 以下の行列の行列式を求めよ．

$$\text{(a).} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(b).} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

（解答）(a) 以下より $\det = -\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 23 & -18 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 23 & -18 \end{vmatrix} = -43$（最初の等号は第 1 列での余因子展開，次の等号は第 3 行での余因子展開による）．ここで $*$ は計算する必要のない数である．

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3\text{ 行}-2\times 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行 }+2\times 1\text{ 行}}]{2\text{ 行 }+3\times 1\text{ 行}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{ 列}-3\times 4\text{ 列}]{2\text{ 列 }+3\times 4\text{ 列}} \begin{pmatrix} -1 & * & * & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 23 & -18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

（解答）(b) 以下より $\det = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6$（最初の等号は第 1 行での余因子展開，次の等号も第 1 行での余因子展開による）．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 列 }+2\times 2\text{ 列}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 列 }+4\text{ 列}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

（コメント）行・列基本変形を用いて，0 をたくさんつくると計算が楽になります．

$\boxed{6}$ $x_1 \sim x_5$ を未知変数とする以下の連立方程式を解け．(b) では，解を持つための定数 a の条件を求め，その条件下で解を求めよ．ただし，変数・パラメータ共に実数の範囲を考える．

$$\text{(a).}\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 5 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \end{cases} \qquad \text{(b).}\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

（解答）(b) 以下より $a = 3$ が解を持つ条件で，このとき $x_2 = -x_3 + 3x_4 - 1, x_1 = 4x_3 - 5x_4 + 3$．まとめると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -5 & 1 & a \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行}\leftrightarrow 3\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3\text{ 行}-2\times 1\text{ 行}]{2\text{ 行}-1\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -9 & a-6 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行}-3\times 2\text{ 行}]{2\text{ 行}/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right).$$

（解答）(a) 以下より $x_4 = 1 + 2x_5, x_3 = 4 - x_5, x_1 = 1 - x_5 - 2x_2$．まとめると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -3 & 6 & 3 \\ -3 & -6 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2\text{ 行}-1\times 1\text{ 行} \\ 3\text{ 行 }+2\times 1\text{ 行} \\ 4\text{ 行 }+3\times 1\text{ 行}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{3\text{ 行}-2\times 2\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-2\times 2\text{ 行}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4\text{ 行}-2\times 3\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{2\text{ 行 }+1\times 3\text{ 行} \\ 1\text{ 行}-1\times 3\text{ 行}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\boxed{7}$ 以下の行列 A, B について，それぞれ対角化可能かどうか調べ，対角化可能な場合は $D := P^{-1}AP, D' := Q^{-1}BQ$ が対角行列になるような可逆行列 P, Q と対角行列 D, D' を求めよ．

$$\text{(a). } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b). } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ 6 & 3 & -4 & 4 \\ 5 & -1 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

（解答）A の固有多項式は

$$\det(tE_4 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & x-4 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & x+1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \begin{vmatrix} x-4 & -2 & -2 \\ 3 & x+1 & 3 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2) \begin{vmatrix} x-4 & -2 \\ 3 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)^2.$$

（最初の等号は第 1 行での余因子展開，次の等号は第 3 行での余因子展開による）．

固有値 1 について $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{並び替え}]{3\text{ 行 }+2\text{ 行 }+4\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t$. 次に $A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ を解くと，以下より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} v$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行 }+6\times 1\text{ 行}]{2\text{ 行}-6\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}]{2\text{ 行}/(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

それぞれ $\boldsymbol{v}$ を表すのに必要なパラメータの数が，固有多項式の重複度に等しいので，A は対角化可能であり，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ となる.

B の固有多項式をもとめる.

$$\begin{pmatrix} t-1 & -5 & -1 & 5 \\ -4 & t-1 & 4 & -5 \\ -6 & -3 & t+4 & -4 \\ -5 & 1 & 5 & t-8 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列 }+4\text{ 列}} \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & t-6 & 4 & -5 \\ -6 & -7 & t+4 & -4 \\ -5 & t-7 & 5 & t-8 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{4\text{ 列 }+5\times 3\text{ 列}} \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & t-6 & 4 & 15 \\ -6 & -7 & t+4 & 5t+16 \\ -5 & t-7 & 5 & t+17 \end{pmatrix}$$

だから，第 1 行での余因子展開より

$$\det(tE_4 - B) = (t-1)\begin{vmatrix} t-6 & 4 & 15 \\ -7 & t+4 & 5t+16 \\ t-7 & 5 & t+17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & t-6 & 15 \\ -6 & -7 & 5t+16 \\ -5 & t-7 & t+17 \end{vmatrix}.$$

それぞれの小行列式を求める.

$$\begin{pmatrix} t-6 & 4 & 15 \\ -7 & t+4 & 5t+16 \\ t-7 & 5 & t+17 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}-3\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -(t+2) \\ -7 & t+4 & 5t+16 \\ t-7 & 5 & t+17 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{2\text{ 列 }+1\text{ 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(t+2) \\ -7 & t-3 & 5t+16 \\ t-7 & t-2 & t+17 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{2\text{ 行 }+7\times 1\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(t+2) \\ 0 & t-3 & -2(t-1) \\ t-7 & t-2 & t+17 \end{pmatrix}$$

なので，サラスの方法より

$$\begin{vmatrix} t-6 & 4 & 15 \\ -7 & t+4 & 5t+16 \\ t-7 & 5 & t+17 \end{vmatrix}. = (t-3)(t+17)+(t-3)(t-7)(t+2)+2(t-2)(t-1)$$
$$= (t-1)(t^2-4t+5).$$

$$\begin{pmatrix} 4 & t-6 & 15 \\ 6 & -7 & 5t+16 \\ 5 & t-7 & t+17 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-1\text{ 行}} \begin{pmatrix} 4 & t-6 & 15 \\ 6 & -7 & 5t+16 \\ 1 & -1 & t+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}-6\times 3\text{ 行}]{1\text{ 行}-4\times 3\text{ 行}} \begin{pmatrix} 0 & t-2 & 7-4t \\ 0 & -1 & -t+4 \\ 1 & -1 & t+2 \end{pmatrix}$$

も合わせると

$$\det(tE_4-B) = (t-1)(t-1)(t^2-4t+5) + \begin{vmatrix} t-2 & 7-4t \\ -1 & -t+4 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2)^2.$$

固有値 1 について $B\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ -6 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行}-4\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -6 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{1\text{ 行}\leftrightarrow 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ -6 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[4\text{ 行 }+5\times 1\text{ 行}]{3\text{ 行 }+6\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\substack{4\text{ 行}-2\text{ 行} \\ \text{並び替え}}]{3\text{ 行}-2\text{ 行}-4\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{3\text{ 行 }+5\times 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，解のパラメータは 1 個で，これは固有多項式 $\det(tE_4-B)=(t-1)^2(t-2)^2$ における $t=1$ の重複度 2 より小さいため，B は対角化不可能である．

（コメント）A については，$P^{-1}AP$ を計算せずに求めることができるというのがポイントです．B については，固有値 1 について $B\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ を調べた段階で対角化不可能性がいえます．この問題が解ければ，とりあえず行列と行列式はマスターしているといえるでしょう．ちなみに $(B-E_4)(B-2E_4)\neq O$ を確認することで B の対角化不可能性を示す方法もあります（未習）．

$\boxed{8}$ $\ell \geq 2$ とする．$X_1, \cdots, X_\ell \in \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}$ について，$X_1 X_2 \cdots X_\ell = E_3$ ならば

$$1 \leq \exists j < \ell, (X_j, X_{j+1}) = (A^{\pm 1}, A^{\mp 1}), (B^{\pm 1}, B^{\mp 1})$$

を示せ．ここで A, B は以下の回転行列である．

$$A^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \mp\frac{2\sqrt{6}}{5} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{6}}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \mp\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{6}}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

（解答）$X_1, \cdots, X_\ell$ は，以下が成り立つとき既約とよぶことにする：

$$1 \leq \forall j < \ell, (X_j, X_{j+1}) \neq (A^{\pm 1}, A^{\mp 1}), (B^{\pm 1}, B^{\mp 1}).$$

示すべきことは，$X_1, \cdots, X_\ell$ が既約であれば，$X_1 \cdots X_\ell \neq E_3$ ということである（対偶）．

まず $X_1 = A^{\pm 1}$ の場合を考える．$0 \leq k \leq \ell$ について

$$\exists a_k \in \mathbb{Z}, \exists b_k \in \mathbb{Z}, \exists c_k \in \mathbb{Z}, (1,0,0) X_1 \cdots X_k = (a_k/5^k, b_k\sqrt{6}/5^k, c_k/5^k)$$

となることはやさしい（$k=0$ のとき $X_1, \cdots, X_k = E_3$ と約束する）．実際，

$$(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}) = \begin{cases} (a_k \pm 12b_k, b_k \mp 2a_k, 5c_k) & (X_{k+1} = A^{\pm 1}) \\ (5a_k, b_k \pm 2c_k, c_k \mp 12b_k) & (X_{k+1} = B^{\pm 1}) \end{cases}$$

かつ $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$ である（ここに既約性の仮定は用いていない）．

$X_1 \cdots X_\ell \neq E_3$ をいうには $(1,0,0) X_1 \cdots X_\ell \neq (1,0,0)$ をいえばよく，そのためには $b_\ell \neq 0$ をいえば十分であり，より強く $1 \leq \forall k \leq \ell, b_k \notin 5\mathbb{Z} := \{5n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を数学的帰納法で示す．

$k=1$ のときは $b_1 = \mp 2$ より従う．$1 \leq k < \ell$ になる k について $b_k \notin 5\mathbb{Z}$ とする．既約性より，以下の場合分けを考えれば十分である．どの場合も $b_k \notin 5\mathbb{Z}$ から $b_{k+1} \notin 5\mathbb{Z}$ が導ける．

$(X_k, X_{k+1}) = (A^{\pm 1}, A^{\pm 1})$ **のとき：** $b_{k+1} = b_k \mp 2a_k = b_k \mp 2(a_{k-1} \pm 12b_{k-1}) = b_k \mp 2a_{k-1} - 24b_{k-1} = b_k + (b_{k-1} \mp 2a_{k-1}) - 25b_{k-1} = 2b_k - 25b_{k-1}$.

$(X_k, X_{k+1}) = (B^{\pm 1}, B^{\pm 1})$ **のとき：** $b_{k+1} = b_k \pm 2c_k = b_k \pm 2(c_{k-1} \mp 12b_{k-1}) = b_k \pm 2c_{k-1} - 24b_{k-1} = b_k + (b_{k-1} \pm 2c_{k-1}) - 25b_{k-1} = 2b_k - 25b_{k-1}$.

$(X_k, X_{k+1}) = (A^{\varepsilon}, B^{\varepsilon'})$ **のとき（ここで** $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$**）：** $b_{k+1} = b_k + \varepsilon' 2c_k = b_k + \varepsilon' 10c_{k-1}$.

$(X_k, X_{k+1}) = (B^{\varepsilon'}, A^{\varepsilon})$ **のとき（ここで** $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$**）：** $b_{k+1} = b_k - \varepsilon 2a_k = b_k - \varepsilon 10a_{k-1}$.

$X_1 = B^{\pm 1}$ のときは $(1,0,0)$ の代わりに $(0,0,1)$ を考えることで，同様に $X_1 \cdots X_\ell \neq E_3$ を示すことができる．

（コメント）バナッハ・タルスキーのパラドックスの証明の鍵となる補題です（直観的な意味は 6 月 6 日のプリントにあるとおりです）．証明には選択公理は必要ありません．この証明は「新版バナッハ-タルスキーのパラドックス，砂田利一著，岩波書店 (2009)」から拝借しました．難しいので解けなくてよいと思います．

- 今日は**高階偏微分・2 変数のテイラー展開**と大学院入試問題を扱います．
- 7/25 は休講です．7/28 は試験です．
- 今日はアンケートがあります．授業 ID は 3145 です．帰る際に TA に渡すか，質問箱に投函してください．

高階偏微分：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について，高階偏微分が $\partial_1\partial_2 f = \partial_1(\partial_2 f)$ といった具合に定義される（存在するならば）．∂_* の個数を，この高階偏微分の階数とよぶ（$\partial_1\partial_2$ は 2 階）．$\partial_1\partial_2$ などを「関数についてその高階偏微分を返す対応」とみなし，微分作用素とよぶことがある．

C^n 級：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について，すべての n 階の偏微分が存在し，かつ連続のとき，f は U で C^n 級という．

偏微分の交換可能性：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された f について，f が C^2 級ならば $\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f$．

（注）これから例えば C^3 級の f について，$\partial_1\partial_2\partial_1 f = \partial_1\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1\partial_1 f$ といったことも従う．

2 変数のテイラーの定理：$\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された C^n 級関数 f を考える．$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \boldsymbol{h} = (s, t)$ について，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ を結ぶ線分が U に含まれるとき

$$
\begin{aligned}
0 < \exists\theta < 1, f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) &+ (s\partial_1 + t\partial_2)f(\boldsymbol{a}) + (s\partial_1 + t\partial_2)^2 f(\boldsymbol{a})/2! \\
&+ \cdots + (s\partial_1 + t\partial_2)^{n-1} f(\boldsymbol{a})/(n-1)! + (s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})/n!
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $(s\partial_1 + t\partial_2)^m f(\boldsymbol{a})$ は $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (\partial_1^k \partial_2^{m-k} f(\boldsymbol{a})) s^k t^{m-k}$ の意味である．微分作用素として $(s\partial_1 + t\partial_2)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} s^k t^{m-k} \partial_1^k \partial_2^{m-k}$ と思うとよいだろう．

1 練習問題

(A1) 以下の f について $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_1\partial_1 f, \partial_1\partial_2 f, \partial_2\partial_1 f, \partial_2\partial_2 f$ を求めよ．

1. $f(x,y) = xe^{xy}$
2. $f(x,y) = \log(1+2x+3y)$

(A2) 以下の $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について：

$$
f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}
$$

1. f は C^1 級であることを示せ．
2. $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)$ を示せ．

(A3) $f(\boldsymbol{a}) + (x\partial_1 + y\partial_2)f(\boldsymbol{a}) + (x\partial_1 + y\partial_2)^2 f(\boldsymbol{a})/2! + \cdots + (x\partial_1 + y\partial_2)^n f(\boldsymbol{a})/n!$ を $\boldsymbol{a}$ における f の n 次テイラー多項式とよぶ．以下の f の $\mathbf{0}$ における 3 次テイラー多項式を求めよ．

1. $f(x,y) = \sin(xy)$
2. $f(x,y) = 1/\sqrt{(1+x)(1+y)}$

(A4) 6 月 13 日の演習問題 (A5) は以下のようなものであった：

$x = a$ のまわり $U(\subseteq \mathbb{R})$ で定義された n 回微分可能な関数 f について，以下の関数を考える（これは $U \setminus \{a\}$ で定義されている）.

$$H(x) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) / (x-a)^n.$$

1. $f^{(n)}$ が連続であれば $\lim_{x \to a} H(x) = 0$ を示せ.
2. 「$f^{(n)}$ が連続」という仮定を外し，単に「n 回微分可能」のとき，どうだろうか？

これを思い出しつつ，f を $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ のまわりで定義された C^n 級関数とするとき

$$\lim_{\boldsymbol{h}=(s,t)\to(0,0)} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \sum_{k=0}^{n}(s\partial_1 + t\partial_2)^k f(\boldsymbol{a})/k!}{\sqrt{s^2+t^2}^n} = 0.$$

(A5) 偏微分の交換可能性について，実際は以下のことが成り立つ：

$f : U \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で定義された関数で，U において $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_2\partial_1 f$ が存在し，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ において $\partial_2\partial_1 f$ は連続とする．このとき $\partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a})$ も存在し，$\partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a}) = \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a})$ である.

証明は授業と同じである：

1. $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ を（小さく）とり，$(a_1, a_2), (a_1+h_1, a_2), (a_1, a_2+h_2), (a_1+h_1, a_2+h_2)$ を頂点とする長方形 Q が U に含まれるとする（U が開集合という仮定より $\boldsymbol{h}$ を小さくとれば可能である）.

   $$\Delta := f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2)$$

   について，Q の内部（つまり Q の境界以外）に $\Delta = h_1 h_2 \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{s})$ を満たす点 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2)$ が存在することを示せ.
2. 冒頭に挙げた命題を証明せよ.

2 Q and A （以下のような質問があったので，答えておきます）

質問 A を 2×2 行列とする．$a \neq b$ で $(A - aE_2)(A - bE_2) = O$ のとき，$A\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}$ の解 $\boldsymbol{v}$ は $A - bE_2$ の縦ベクトルのスカラー倍として求めることができるらしいのですが，同じことが一般の正方行列でもいえるのでしょうか？

回答 簡単にいうと，A が単位行列のスカラー倍でない 2×2 行列であればうまくいきます．他の場合は注意が必要ですし，掃出し法で求める以上の利点はないように思います．以下の行列で実験してみてください（$\alpha \neq \beta$）：

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(A1) 1. $\partial_1 f = e^{xy} + xye^{xy}$, $\partial_2 f = x^2 e^{xy}$, $\partial_1\partial_1 f = 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy}$, $\partial_2\partial_2 f = x^3 e^{xy}$, $\partial_1\partial_2 f = 2xe^{xy} + x^2 ye^{xy} = \partial_2\partial_1 f$.

2. $\partial_1 f = 2/(1+2x+3y)$, $\partial_2 f = 3/(1+2x+3y)$, $\partial_1\partial_1 f = -4/(1+2x+3y)^2$, $\partial_2\partial_2 f = -9/(1+2x+3y)^2$, $\partial_1\partial_2 f = -6/(1+2x+3y)^2 = \partial_2\partial_1 f$.

(A2) 1. $(x,y) \neq (0,0)$ のとき，

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{(y(x^2-y^2)+2x^2y)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_2 f(x,y) = \frac{(x(x^2-y^2)-2x^2y)(x^2+y^2) - 2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

また

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \partial_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

である．$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_1 f(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_2 f(x,y)$ をいえばよいが，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと

$$|\partial_1 f(x,y)| \leq 6r, \quad |\partial_2 f(x,y)| \leq 6r$$

となるので，$r \to 0$ のとき $\partial_1 f(x,y) \to 0$ かつ $\partial_2 f(x,y) \to 0$ となる．

2. $\displaystyle\partial_1\partial_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial_2 f(h,0)}{h} = 1$, $\displaystyle\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial_1 f(0,h)}{h} = -1$ となっている．

(A3) 明示的に書くと，以下が求める多項式である．

$$f(\mathbf{0}) + \partial_1 f(\mathbf{0})x + \partial_2 f(\mathbf{0})y + \frac{\partial_1^2 f(\mathbf{0})}{2}x^2 + \partial_1\partial_2 f(\mathbf{0})xy + \frac{\partial_2^2 f(\mathbf{0})}{2}y^2$$
$$+ \frac{\partial_1^3 f(\mathbf{0})}{6}x^3 + \frac{\partial_1^2\partial_2 f(\mathbf{0})}{2}x^2y + \frac{\partial_1\partial_2^2 f(\mathbf{0})}{2}xy^2 + \frac{\partial_2^3 f(\mathbf{0})}{6}y^3$$

1. xy
2. $1 - (x+y)/2 + (3x^2+2xy+3y^2)/8 - (5x^3+3x^2y+3xy^2+5y^3)/16$

(A4) 2 変数のテイラーの定理より

$$0 < \exists\theta < 1, f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + (s\partial_1 + t\partial_2)f(\boldsymbol{a}) + (s\partial_1 + t\partial_2)^2 f(\boldsymbol{a})/2!$$
$$+ \cdots + (s\partial_1 + t\partial_2)^{n-1} f(\boldsymbol{a})/(n-1)! + (s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})/n!.$$

よって求める極限は

$$\lim_{\boldsymbol{h}=(s,t)\to(0,0)} \frac{(s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}) - (s\partial_1 + t\partial_2)^n f(\boldsymbol{a})}{n!\sqrt{s^2+t^2}^n}$$
$$= \lim_{\boldsymbol{h}=(s,t)\to(0,0)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\frac{s^k}{\sqrt{s^2+t^2}^k}\frac{t^{n-k}}{\sqrt{s^2+t^2}^{n-k}}(\partial_1^k\partial_2^{n-k} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \partial_1^k\partial_2^{n-k} f(\boldsymbol{a}))$$

f は C^n 級なので $\partial_1^k\partial_2^{n-k} f$ は連続だから $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{h}=(s,t)\to(0,0)} \partial_1^k\partial_2^{n-k} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \partial_1^k\partial_2^{n-k} f(\boldsymbol{a}) = 0$ であり，$\displaystyle\left|\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{s^k}{\sqrt{s^2+t^2}^k}\frac{t^{n-k}}{\sqrt{s^2+t^2}^{n-k}}\right| \leq 1$ より，求める極限は 0 である．

(A5) 1. $g(x) = f(x, a_2 + h_2) - f(x, a_2)$ とすると $\Delta = g(a_1 + h_1) - g(a_1)$ だが，g は微分可能なので（$\because g'(x) = \partial_1 f(x, a_2 + h_2) - \partial_1 f(x, a_2)$．ここに $\partial_1 f$ の存在を用いた）平均値の定理より

$$\exists\theta \in (0,1), \Delta = h_1(\partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2 + h_2) - \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2)).$$

$h(y) = \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, y)$ に同じ考えを適用して（ここに $\partial_2\partial_1 f$ の存在を用いている）

$$\exists\theta' \in (0,1), \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2 + h_2) - \partial_1 f(a_1 + \theta h_1, a_2) = h_2 \partial_2\partial_1(a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta' h_2).$$

まとめると $(s,t) = (a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta' h_2)$ がもとめるものである．

2. $A = \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a})$ とする．$\partial_2\partial_1 f$ は $\boldsymbol{a}$ で連続なので

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall h_1, \forall h_2, (0 < |h_1|, |h_2| < \delta \Rightarrow |\partial_2\partial_1 f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - A| < \varepsilon).$$

1 より $\left|\dfrac{\Delta}{h_1 h_2} - A\right| < \varepsilon$ だが

$$\frac{\Delta}{h_1 h_2} = \frac{1}{h_1}\left(\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)}{h_2} - \frac{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}{h_2}\right)$$

に注意する．h_1 を固定して $h_2 \to 0$ とすると

$$\left|\frac{\partial_2 f(a_1 + h_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2)}{h_1} - A\right| \leq \varepsilon$$

をえる（ここに $\partial_2 f$ の存在を用いた）．これが任意の $0 < |h_1| < \delta$ について成り立つのだから，定義より $\partial_1\partial_2 f(a_1, a_2) = A$ ということである．