$\boxed{1}$ (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4行)+(3行)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3行)+(1行)2]{(2行)-(1行)3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -11 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2行)\Leftrightarrow(3行)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 7 & -11 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4行)+(2行)2]{(3行)+(2行)7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 44 \\ 0 & 0 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

$\therefore \det = 1\cdot(-1)\cdot 19 = -19$

(b)

$$\begin{pmatrix} x & x & x & y \\ x & x & y & x \\ x & y & x & x \\ y & x & x & x \end{pmatrix} \xrightarrow{(1行)+(2行)\sim(4行)} \begin{pmatrix} 3x+y & 3x+y & 3x+y & 3x+y \\ x & x & y & x \\ x & y & x & x \\ y & x & x & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & y & x \\ x & y & x & x \\ y & x & x & x \end{pmatrix} \xrightarrow[(4行)-(1行)y]{(2行)-(1行)x,\ (3行)-(1行)x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & y-x & \boxed{0} \\ 0 & y-x & 0 & \boxed{0} \\ y-x & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

よって $\det = (3x+y) - \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & y-x \\ 0 & y-x & 0 \\ y-x & 0 & 0 \end{vmatrix}}^{4列で余因子展開した}$

$= (3x+y)(x-y)^3$

$\boxed{2}$ (a)

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & -2 & -2 \\ 8 & t+3 & 4 \\ 6 & 3 & t+2 \end{vmatrix} = (t-5)(t+3)(t+2) - 48 - 48 + 12(t+3) - 12(t-5) + 16(t+2)$$

$$= (t-5)(t^2+5t+6) + 16t + 32$$

$$= t^3 - 3t + 2 = (t-1)(t^2+t-2) = (t-1)^2(t+2)$$

よって、Aが対角化可能 $\Leftrightarrow$「固有値1の固有空間 V_1 の次元 $= 2$」である。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)+(1行)\frac{3}{2}]{(2行)+(1行)2} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より V_1 の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれるので

Aは対角化可能である。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & -2 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1行)\cdot\frac{1}{3}]{(3行)\leftrightarrow(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 0 \\ -7 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)+(1行)\frac{7}{2}]{(2行)-(1行)\cdot 4} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1.5 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)-(2行)\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より V_{-2} の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれる。以上より $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる。

(b) $\Phi_B(t) = \begin{vmatrix} t+1 & 5 & 3 \\ -2 & t-6 & -3 \\ 5 & 11 & t+5 \end{vmatrix} = (t+1)(t-6)(t+5) - 75 - 66 - 15(t-6) + 33(t+1) + 10(t+5)$

$= (t^3 \quad -31t-30) + 32 + 28t = t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$

固有値1の固有空間は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & -3 & 0 \\ 5 & 11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2行)+(1行)]{(3行)-(1行)\frac{5}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & -1.5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)\leftrightarrow(3行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1.5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より1次元なので

Bは対角化不可能である。

(S1) $|\lambda E_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-11 & 2 \\ -8 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-11)(\lambda-3)+16$

$= \lambda^2 - 14\lambda + 49 = (\lambda-7)^2$

より J は $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ である。

$Av = 7v$ を解く

$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)-(1行)\cdot 2} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$

パラメータの個数が1つなので、固有値7のJordan細胞の個数は1つである。

よって $J = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$P = (\vec{p_1}, \vec{p_2})$ とすると、$A\vec{p_1} = 7\vec{p_1}$, $A\vec{p_2} = 7\vec{p_2} + \vec{p_1}$ なので、これを見つける。

まず $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$ なのだった。そこで $A\vec{p_2} = 7\vec{p_2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$ を解くと、

$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & t \\ 8 & -4 & 2t \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)-(1行)\cdot 2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore \vec{p_2} = \begin{pmatrix} \frac{t}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ 注 (これは解の1つです)

$t=4$ とすると、$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

(S2) $|\lambda E_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2)+1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$

より $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である。

$Av = 3v$ を解く

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)+(1行)} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$

パラメータの数が1つなので、固有値3のJordan細胞の個数は1つである。

よって $J=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$ である。

$P=(\vec{p_1},\vec{p_2})$ とすると、$A\vec{p_1}=3\vec{p_1}$, $A\vec{p_2}=3\vec{p_2}+\vec{p_1}$ なので これを見つける。

まず $\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t$ なのだった。$A\vec{p_2}=3\vec{p_2}+\vec{p_1}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&t\\-1&-1&-t\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)+(1行)}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&t\\0&0&0\end{array}\right)\quad\therefore\ \vec{p_2}=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$$

(注 これ以外にも解はあります)

$t=1$ とすると、$P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

(S3)

$$\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\beta\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\alpha&1&0\\0&\alpha&0\\0&0&\beta\end{pmatrix}\quad\boxed{\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\alpha&1&0\\0&\alpha&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\alpha&1&0\\0&\alpha&1\\0&0&\alpha\end{pmatrix}}$$

$\alpha\neq\beta,\ \alpha\neq\gamma,\ \beta\neq\gamma$ $\alpha\neq\beta$ $\alpha\neq\beta$

$J(\alpha;1)\oplus J(\beta;1)\oplus J(\gamma;1)$ $\underbrace{J(\alpha;1)^{\oplus 2}\oplus J(\beta;1) \quad J(\alpha;2)\oplus J(\beta;1)}_{固有値が2つの場合}$ $\boxed{J(\alpha;1)^{\oplus 3} \quad J(\alpha;2)\oplus J(\alpha;1) \quad J(\alpha;3)}$

固有値が全て異なる場合   固有値が2つの場合   固有値が1つの場合

(S4) 上で □ 内の3つがJNFのありうる可能性である。

(S5)

$$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&2&3\\4&\lambda-6&-6\\-4&4&\lambda+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&2&3\\4&\lambda-6&-6\\0&\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&2&3\\4&\lambda-6&-6\\0&1&1\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda-4&2&3\\4&\lambda-6&-6\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[(3列)-(2列)]{}\overset{3行+2行}{\begin{pmatrix}\lambda-4&2&1\\4&\lambda-6&-\lambda\\0&1&0\end{pmatrix}}$$

でこれのdet $= 4+\lambda(\lambda-4)=(\lambda-2)^2$

よって $|\lambda E_3 - A| = (\lambda-2)^3$ なので $J_A = \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2&1&0\\0&2&1\\0&0&2 \end{pmatrix}$

のどれかである。

$Av = 2v$ を解く

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-2&-3&0\\-4&4&6&0\\4&-4&-6&0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(1行)}\cdot 2]{\text{(2行)}+\text{(1行)}\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2&-2&-3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 3\\0\\2 \end{pmatrix} t$$

(＊)

パラメータの数は2つなので、固有値2のJordan細胞の数は2つである。

よって $J_A = \begin{pmatrix} 2&1&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$ である。

$P = (\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3})$ とすると、$A\vec{p_1} = 2\vec{p_1}$, $A\vec{p_2} = 2\vec{p_2} + \vec{p_1}$, $A\vec{p_3} = 2\vec{p_3}$ なので、

これを見つける。$\vec{p_1}$ と $\vec{p_3}$ については(＊)の通りである。

そこで $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 3\\0\\2 \end{pmatrix} t$ について、$\underline{\underline{A\vec{p_2} = 2\vec{p_2} + \vec{p_1}}}$ を解く

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2&-2&-3&s+3t\\-4&4&6&s\\4&-4&-6&2t \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(1行)}\cdot 2]{\text{(2行)}+\text{(1行)}\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2&-2&-3&s+3t\\0&0&0&3s+6t\\0&0&0&-2s-4t \end{array}\right)$$

よって、$\underline{\underline{\quad\quad}}$ が解をもつ必要十分条件は $\begin{pmatrix} s\\t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\1 \end{pmatrix} u$

$\begin{pmatrix} s\\t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\1 \end{pmatrix}$ として、$\vec{p_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\0\\6 \end{pmatrix}$ と求める（これは解 $\vec{p_2}$ の1つです）

$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1\\-2\\2 \end{pmatrix}$ だから、$\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}$ とでもすると、$P = \begin{pmatrix} 1&\frac{1}{2}&1\\-2&0&1\\2&0&0 \end{pmatrix}$ と求まった。

(56) $8=7+1=6+2=5+3=4+4=3+3+2=2+2+2+2$
$=6+1+1=5+2+1=4+3+1=3+3+1+1=2+2+2+1+1$
$=5+1+1+1=4+2+2=3+2+2+1=2+2+1+1+1+1$
$=4+2+1+1=3+2+1+1+1=2+1+1+1+1+1+1$
$=4+1+1+1+1=3+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1+1+1$

(*) ——

の22通りに対応するJNF J が $\det(\lambda E_8-A)=\lambda^8$ のJNFの可能性である。

(たとえば $5+2+1$ には $J(0;5)\oplus J(0;2)\oplus J(0;1)=$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc|c}0&1&&&&&&\\&0&1&&&&&\\&&0&1&&&&\\&&&0&1&&&\\&&&&0&&&\\ \hline &&&&&0&1&\\&&&&&&0&\\ \hline &&&&&&&0\end{array}\right)$$

が対応する)

今、
$$\begin{pmatrix}0&1&&O\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\O&&&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&&O\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&\ddots&0\\O&&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&&O\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\O&&&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&&O\\&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&1\\&&&\ddots&\ddots&0\\&&&&\ddots&0\\O&&&&&0\end{pmatrix}$$
etc より

$J(0;k)^3=O \iff k=1,2,3$
$J(0;k)^2\neq O \iff k\geq 3$
が分かる。

よって $A^2\neq O$, $A^3=O$ に対応するJNFは (さらに)
① サイズ3の細胞が少なくとも1つ有り
② $\forall$の細胞の大きさは3以下

となっている。(*)中でこの条件をみたすものは $3+3+2=3+3+1+1=3+2+2+1$
$=3+2+1+1+1=3+1+1+1+1+1$

の5通りである。陽に書けば AのJNFの可能性は

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|cc}0&1&&&&&&\\&0&1&&&&&\\&&0&&&&&\\ \hline &&&0&1&&&\\&&&&0&1&&\\&&&&&0&&\\ \hline &&&&&&0&1\\&&&&&&&0\end{array}\right),\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|c}0&1&&&&&&\\&0&1&&&&&\\&&0&&&&&\\ \hline &&&0&1&&&\\&&&&0&1&&\\&&&&&0&&\\ \hline &&&&&&0&\\ \hline &&&&&&&0\end{array}\right),\ \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c}0&1&&&&&&\\&0&1&&&&&\\&&0&&&&&\\ \hline &&&0&1&&&\\&&&&0&&&\\ \hline &&&&&0&1&\\&&&&&&0&\\ \hline &&&&&&&0\end{array}\right),$$
$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c|c|c}0&1&&&&&&\\&0&1&&&&&\\&&0&&&&&\\ \hline &&&0&1&&&\\&&&&0&&&\\ \hline &&&&&0&&\\ \hline &&&&&&0&\\ \hline &&&&&&&0\end{array}\right),\ \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c|c}0&1&&&&&&\\&0&1&&&&&\\&&0&&&&&\\ \hline &&&0&&&&\\ \hline &&&&0&&&\\ \hline &&&&&0&&\\ \hline &&&&&&0&\\ \hline &&&&&&&0\end{array}\right)$$

の5通りである。