(A1)

$$\lambda E_3 - A = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -3 \\ 4 & \lambda+1 & 5 \\ -1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \underset{2行+3行\cdot 4}{=} \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & 4\lambda-11 \\ -1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \underset{2列-1列}{=} \begin{vmatrix} \lambda-5 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & \lambda-3 & 4\lambda-11 \\ -1 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\{(\lambda-5)(\lambda-4)+(4\lambda-11)-3\} = (\lambda-3)^2(\lambda-2)$$

よって AのJNFは $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ 0 & 3 & \\ \hline & & 2 \end{array}\right)$ or $\left(\begin{array}{c|c|c} 3 & & \\ \hline & 3 & \\ \hline & & 2 \end{array}\right)$ のどれかである。

<u>$Av=3v$ を解く:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)\leftrightarrow(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)-(1行)\cdot 2]{(2行)+(1行)\cdot 4} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3行+2行} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t \quad (tはパラメータ)$$

これから AのJNFは $J = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ \hline & & 2 \end{array}\right)$ と分かる。

$P^{-1}AP = J$ となる $P = (\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3})$ は
$A\vec{p_1} = 3\vec{p_1}$
$A\vec{p_2} = 3\vec{p_2} + \vec{p_1}$
$A\vec{p_3} = 2\vec{p_3}$
を解いて得られる。

$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t$ について $(A-3E)\vec{p_2} = \vec{p_1}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & t \\ -4 & -4 & -5 & -t \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[後(2行)\leftrightarrow(3行)]{(3行)\leftrightarrow(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & t \\ -4 & -4 & -5 & -t \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)+(1行)\cdot 4]{(2行)-(1行)\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & -1 & -t \end{array}\right)$$

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ （sはパラメータ）となる

<u>$Av=2v$を解く：</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(3行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)-(1行)\cdot 3]{(2行)+(1行)\cdot 4} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3行)+(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (u\text{はパラメータ})$$

$t=1$、$s=0$、$u=1$として $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が求まった

(A2)

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \underset{1列+2列}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ \lambda-3 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\{(\lambda-3)(\lambda-4) + (\lambda-4) + 1\} = (\lambda-3)^3$$

よって JNF は $\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ or $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ \hline & & 3 \end{array}\right)$ or $\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix}$ のどれかである。

<u>$A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}$ を解く</u>：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)-(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

(s, t はパラメータ)

よって $J = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ \hline & & 3 \end{array}\right)$ とわかる。

$P^{-1}AP = J$ となる $P = (\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3})$ は
$A\vec{p_1} = 3\vec{p_1}$
$A\vec{p_2} = 3\vec{p_2} + \vec{p_1}$
$A\vec{p_3} = 3\vec{p_3}$
を解いて得られる。

$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$ について $(A - 3E_3)\vec{p_2} = \vec{p_1}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & +t \\ 0 & 0 & 0 & -s \\ -1 & 1 & 1 & s+t \end{array}\right) \xrightarrow{3行-1行} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & +t \\ 0 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 0 & 0 & s \end{array}\right)$$ より $s=0$ が解をもつ

必要十分条件で、このとき $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (u, v はパラメータ)

$t=1$、$u=v=0$、$\vec{p_3}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ とすることで $P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ と求まった。

(B1)

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \underset{1行-3行}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 3-\lambda \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \underset{3列+1列}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2)^2$$

$A\vec{v} = 2\vec{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)+(1行)\times 2]{(2行)+(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)+(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって A の JNF は $J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ \hline & & 3 \end{array}\right)$ とわかる。

$$J^n = \left(\begin{array}{cc|c} 2^n & n\cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3^n \end{array}\right)$$

なので A^n の各成分は $c\cdot 2^n + d\cdot n2^{n-1} + e3^n$ の形をしている。

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & -5 \\ -9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

から必要な定数を求めると、

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - n\cdot 2^{n-1}, & n\cdot 2^{n-1}, & n\cdot 2^{n-1} \\ 3^n - 2^n, & 2^n & 2^n - 3^n \\ 2^n - n\cdot 2^{n-1} - 3^n, & n\cdot 2^{n-1}, & n\cdot 2^{n-1} + 3^n \end{pmatrix}$$

と求まる。

(B2)

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

であるから、$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とおき、

まずは A の JNF を求める。

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -4 & -5 \\ 2 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda-4) + 20 - 4\lambda + 8(\lambda-4)$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 12\lambda + 20 - 4\lambda + 8\lambda - 32$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$A\vec{v} = 2\vec{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)-(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)+(2行)\cdot\frac{2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より $J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ と求まる。

(B1) と同様に $a_n = p2^n + q2^{n-1}\cdot n + r3^n$ という形をしており、

$b_n = x2^n + y2^{n-1}\cdot n + z3^n$

$c_n = \alpha 2^n + \beta 2^{n-1}\cdot n + \gamma 3^n$

$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$ より必要な値を定めると、

$a_n = 3\cdot 2^n + n\cdot 2^n$, $b_n = 2^{n+1} - n\cdot 2^{n+1}$, $c_n = n\cdot 2^{n+1}$ が求める一般項である。

(B3) $J = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ について $S^{-1}AS = J$ である。

(wolfram alpha を用いた)

$A = X^2$ のとき $J = (S^{-1}XS)(S^{-1}XS)$ なので、

$S^{-1}XS = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば

$a^2 + bc = 9$

$b(a+d) = 1$

$c(a+d) = 0$

$bc + d^2 = 9$

$\therefore\ c = 0$

$(a, d, b) = \pm\left(3, 3, \frac{1}{6}\right)$

よって求める $X = \pm S\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{6} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} S^{-1} = \pm\begin{pmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$

(B4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ について $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{"}{=} J$ である。

(wolfram alpha を用いた)

$$\exp J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 2^2 & 2\cdot 2^1 & \binom{2}{1}2^0 \\ 0 & 2^2 & 2\cdot 2^1 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} & \binom{n}{2}2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & e^2/2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = e^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\exp A = P\cdot \exp J \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{e^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(B5) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とすると

一般解は $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (\exp tA)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ である。

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&2\\1&0&3\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}0&3&-2\\-1&3&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}$$ について $$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

である（wolfram alpha を用いた）。先ほどと同様に

$$\exp tJ=\left(\begin{array}{cc|c}e^{2t}&te^{2t}&0\\0&e^{2t}&0\\\hline 0&0&e^{3t}\end{array}\right)$$ なので

$$(\exp tA)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=P(\exp tJ)P^{-1}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&2\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}&te^{2t}&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix}0&3&-2\\-1&3&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}}^{=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}\text{とおく}}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{2t}&(t-1)e^{2t}&0\\e^{2t}&te^{2t}&2e^{3t}\\e^{2t}&te^{2t}&3e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$$

なので一般解は
$$\begin{cases}x=e^{2t}(d_1+d_2(t-1))\\y=e^{2t}(d_1+d_2t)+2d_3e^{3}\\z=e^{2t}(d_1+d_2t)+3d_3e^{3}\end{cases}$$
（d_1,d_2,d_3は任意定数）

(C5)

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda-1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3) + 2(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$Av = v$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)-(1行)]{(2行)+(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より A の JNF は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_A$ と分かる。

$$|\lambda E_3 - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -x & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & -x & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$Bv = v$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{並べかえ} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -x & -1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

〰 部の rank が 1 になる条件 ($\Leftrightarrow$ B の JNF $= J_A$) は $x=0$ //

(C4)

1. $A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ とすると $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ について,

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & g & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $a = e$
$d = f = g = 0$

つまり $B=\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ \hline 0 & h & i \end{array}\right)$ の形をしている（a, b, c, h, i はパラメータ）

Aの多項式の $(1,3), (2,3), (3,1), (3,2)$ 成分は必ず0なので、

このAでは $\subsetneq$ になっている。

(C4)^2. $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0}\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i A^i \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n+1}\right\} = P_A$ とおく。

$P^{-1}AP = J$ のとき $P_A = C_A \Leftrightarrow P_J = C_J$ を示す。 — (*)

(∵) まず $f: C_A \to C_J$, $g: C_J \to C_A$ は
$B \mapsto P^{-1}BP$　　$B' \mapsto PB'P^{-1}$

well-definedで $g\circ f = id_{C_A}$, $f\circ g = id_{C_J}$ である。

$f|_{P_A}: P_A \to P_J$, $g|_{P_J}: P_J \to P_A$ についても同様

だから、$f, g, f|_{P_A}: P_A \to P_J$, $g|_{P_J}: P_J \to P_A$ は全て全単射である。

（詳細は各自おぎなって下さい。）

(*)によって Aの必要十分条件は JNFの言葉で書かれることになります。

答えは「AのJNF Jに、各固有値の細胞が丁度1つずつ現れる」

になると思います（間違っているかもしれません。）