$\boxed{1}$ 写像 $f : X \to Y$ が

- 集合論的単射であるとは，$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ となること
- モニックであるとは，任意の集合 Z と任意の写像 $g_1, g_2 : Z \to X$ について，$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$ となること

と定義される．

(a) 写像 $f : X \to Y$ が，モニックであれば集合論的単射であることを示せ．
(b) (a) の逆も正しく，容易である（認めてよい）．これと (a) を用いて「2 つの集合論的単射 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ はふたたび集合論的単射である」の別証明をあたえよ．

（解答）(a) f がモニックのときに「$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$」を示す．$f(x_1) = f(x_2)$ なる $x_1, x_2 \in X$ を任意にとり，Z を 1 点集合 $Z = \{*\}$ として，写像 $g_i : Z \to X$ を $g_i(*) = x_i$ によって定める（$i = 1, 2$）．このとき $(f \circ g_i)(*) = f(x_i)$ なので（$i = 1, 2$），$f \circ g_1 = f \circ g_2$ だが，f はモニックなので $g_1 = g_2$ をえる．これは $g_1(*) = g_2(*)$ ということなので，のぞみどおり $x_1 = x_2$ がえられた．

(b) 写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ がともにモニックのときに，合成 $g \circ f : X \to Z$ もモニックであることを示す．そのために集合 W と写像 $h_1, h_2 : W \to X$ が $(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2$ のとき，$h_1 = h_2$ をいえばよい．写像の合成は結合法則をみたすので，$(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2$ は $g \circ (f \circ h_1) = g \circ (f \circ h_2)$ と同値である．g はモニックだったから，$f \circ h_1 = f \circ h_2$ がえられる．f はモニックだったから，$h_1 = h_2$ がえられた．

（コメント）おおざっぱにいうと，元を用いずに単射が定義できる，ということです．このような他の写像との関係を用いた定義は「圏論的な定義」ともよばれます．

$\boxed{2}$ 写像 $f : X \to Y$ と，部分集合 $A, B \subseteq X$ について

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つかどうか調べよ．
(b) f が単射であるとき，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つかどうか調べよ．

（解答）(a) 成り立たない．実際，$X = Y = \{0, 1\}$ ととり，写像 $f : X \to Y$ を $f(0) = f(1) = 0$ によって定義すると，$A = \{0\}, B = \{1\} (\subseteq X)$ について，$A \cap B = \emptyset$ なので $f(A \cap B) = \emptyset$ だが，$f(A) = f(B) = \{0\} (\subseteq Y)$ なので $f(A) \cap f(B) = \{0\} \supsetneq f(A \cap B)$ となっている．

(b) 成り立つ．一般に，写像 $f : X \to Y$ と，部分集合 $A, B \subseteq X$ について $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ が成り立つことを注意する（これは $A \cap B \subseteq A$ かつ $A \cap B \subseteq B$ なので，$f(A \cap B) \subseteq f(A)$ かつ

$f(A\cap B)\subseteq f(B)$ だからである）．そこで「さらに f が単射のとき，$f(A)\cap f(B)\subseteq f(A\cap B)$ が成り立つ」を示せばよい．定義より，$x\in f(A)\cap f(B)$ は，$x\in f(A\cap B)$ であることを示せばよい．$x\in f(A)\cap f(B)$ とは，$\exists a\in A,\exists b\in B, x=f(a)=f(b)$ ということである．いま f は単射なので，$a=b$ であり，$a=b\in A\cap B$ がえられる．よって $x=f(a)=f(b)\in f(A\cap B)$ である．

（コメント）部分集合 $S,T\subseteq\Omega$ について，$S=T$ とは「$S\subseteq T$ かつ $T\supseteq S$」のことです．だから両向きの包含関係を示せばよいですが，実際には片側の包含関係は容易であることが多いです．

$\boxed{3}$ 連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が，$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\dfrac{f(x)}{x}>0$ をみたすとき $f(0)=0$ を示せ．

（解答）$f(0)\neq 0$ と仮定して矛盾を導く．f はとくに $x=0$ で連続だから，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\forall x\in\mathbb{R},|x|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ である．$0<x_0<\delta\left(\dfrac{|f(0)|}{2}\right)$ なる $x_0\in\mathbb{R}$ を 1 つとると，$f(\pm x_0)$ は $f(0)$ と同じ符号であるが，これは $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\dfrac{f(x)}{x}>0$ に反する．

（コメント）「数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ が $\forall n\geq 0, a_n>0$ で，$\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在するとき，$\alpha\geq 0$」の類題でした．

$\boxed{4}$ 実数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ について，$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\infty$ が成り立つかどうか調べよ．

（解答）$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\infty$ とは

$$\forall K>0,\exists N=N(K)>0,\forall n>N,a_{n+1}-a_n>K$$

の略記法なのだった．望遠鏡の和（telescoping method）より，$M=N(3K)$ とすると

$$\forall n>M+1,\frac{a_n-a_{M+1}}{n-(M+1)}>3K$$

をえるが，$\dfrac{a_n-a_m}{n-m}=\dfrac{n}{n-m}\left(\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{a_m}{n}\right)$ に注目すると

$$\forall n>M+1,\frac{a_n}{n}-\frac{a_{M+1}}{n}>\left(1-\frac{M+1}{n}\right)3K$$

となる．$n>M+1$ を $1-\dfrac{M+1}{n}>\dfrac{1}{2}$ かつ $\left|\dfrac{a_{M+1}}{n}\right|<\dfrac{K}{2}$ となるように選んで M' とする（これは $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ より可能である）．このとき $\forall n>M',\dfrac{a_n}{n}=\left(\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{a_{M+1}}{n}\right)+\dfrac{a_{M+1}}{n}>\dfrac{3K}{2}-\dfrac{K}{2}=K.$

（コメント）「中根美知代著，ε-δ 論法とその形成（共立出版）」によると，ε-δ 論法の発祥といわれているコーシーの解析教程で，このことが論じられているそうです．「数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ について，$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\alpha$」の類題といえます．

$\boxed{5}$ $(a_n)_{n\geq 0}$ は各項が実数である数列とする．

1. 数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ が上に有界でないことの定義，および $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ の定義を述べよ．
2. 次の命題の真偽を理由を付けて判定せよ．

$\forall n \geq 0, a_n \geq 0$ であり，かつ $(a_n)_{n\geq 0}$ が上に有界でないならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ である．

（解答）(a) 数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ が上に有界であることの定義は「$\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0, a_n \leq K$」なので，その否定は「$\forall K \in \mathbb{R}, \exists n \geq 0, a_n > K$」となる．$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ の定義は「$\forall K \in \mathbb{R}, \exists N > 0, \forall n > N, a_n > K$」である．

(b) 偽である．実際，$a_{2m} = 2m, a_{2m+1} = 0$（ここで $m \geq 0$）によって数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ を定めると，これは上に有界でなく，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ でもない．

（コメント）述語論理で書かれた命題の否定は機械的にえられる，というのがポイントの 1 つです．(a) で問われている定義は，$>$ を $\geq$ に変えた定義や，$\in \mathbb{R}$ を > 0 に変えた定義など（見た目の異なるものが）複数ありえます．

$\boxed{6}$ $n \geq 1$ とする．多項式

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

は，n が偶数のとき実数解をもたず，n が奇数のとき実数解をちょうど 1 つもつことを示せ．ただし n が奇数のとき，$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = \pm\infty$ は認めてよい．

（解答）$n \geq 1$ について $f_n' = f_{n-1}$ に注意する（ただし $f_0 = 1$ とした）．よって $g_n := (e^{-x} f_n)' = e^{-x}(f_n' - f_n) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$ がなりたつ．まず，偶数 $n \geq 2$ について，以下の命題

$$P_n := 「\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) > 0」$$

が成り立つことを示そう．実際，$n \geq 2$ が偶数であれば $\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} \leq 0$ なので，$e^{-x} f_n$ は単調減少関数である．また $\forall m \geq 0, \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$ より（ただし $x^0 = 1$），$\lim_{x\to\infty} e^{-x} f_n(x) = 0$ である．以上から，P_n は真でなければならない．実際，もしも

- $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f_n(x_0) < 0$ とすると，$e^{-x} f_n$ が単調減少関数であることから，$\forall x \geq x_0, e^{-x} f_n(x) \leq e^{-x_0} f_n(x_0) < 0$ となり，$\lim_{x\to\infty} e^{-x} f_n(x) = 0$ に反する．
- $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f_n(x_0) = 0$ とすると，$e^{-x} f_n$ が単調減少関数であることと $\lim_{x\to\infty} e^{-x} f_n(x) = 0$ より，$\forall x \geq x_0, e^{-x} f_n(x) = 0$ でなければならないが，これは $\forall x \geq x_0, f_n(x) = 0$ ということであり，n 次多項式が高々 n 個の複素数解をもつことに反する．

さて，P_n は $n = 0$ でも真であることを注意する．$n \geq 1$ が奇数であれば，$f_n' = f_{n-1}$ と P_{n-1} より，f_n は狭義単調増加関数である．よって実零点は高々 1 つしか存在しない．そして $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = \pm\infty$ なので，中間値の定理より少なくとも 1 つの実零点をもつ．

（コメント）出典は「ラマヌジャンが遺した関数（岩波書店）」です．$f_n(z)=0$ の複素数解 z の挙動が面白い，ということがふれられています．

$\boxed{7}$ a,b を実数の定数とする，実未知変数 $x_1,\cdots,x_4$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2+4x_4=0 \\ x_1+x_2+ax_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2-x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+(b+5)x_2-2x_3+(2b+6)x_4=0 \end{cases}$$

を考える．a,b がどのような条件を満たせば，これの解 $x_1,\cdots,x_4$ がパラメータを 1 つだけ含むのか，a,b に関する必要十分条件を求めよ．

（解答）拡大係数行列に掃出し法を施すと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & a & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & b+5 & -2 & 2b+6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2\text{ 行}-1\text{ 行} \\ 3\text{ 行}-1\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-1\text{ 行} \\ 5\text{ 行}-1\text{ 行}\times 2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & -4 & 2(b-1) & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{3\text{ 行}+2\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-2\text{ 行} \\ 5\text{ 行}-(b+1)\times 2\text{ 行}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & 2(b-1) & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{ 行}\leftrightarrow 4\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & 2(b-1) & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{4\text{ 行}+(a-2)\times 3\text{ 行} \\ 5\text{ 行}+(b-3)\times 3\text{ 行}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(b-1) & 0 \end{array}\right)$$

となるので，与えられた連立方程式に解が存在する必要十分条件は $b=1$ で，このとき解は非 pivot 変数の x_4 をパラメータにもつ．よって答えは「a は任意の実数で $b=1$」となる．

（コメント）掃出し法では，はやめに 0 や 1 をたくさん作るとよいでしょう．S2 でも練習します．

$\boxed{8}$ 出典は「数学を語ろう！ 2 代数・数論・数学史篇（丸善出版）」です（シュトゥディやデュドネによる定義も紹介されています）．非可換な数体系の行列式はいまでも研究されています（quasideterminant などで検索）．四元数の重要性について「志村五郎著，数学をいかに使うか（筑摩書房）」の 4 章にある説明が興味深いと思いました．