$\boxed{1}$ 以下の行列 A, B について，それぞれ対角化可能かどうか調べ，対角化可能な場合は $D := P^{-1}AP, D' := Q^{-1}BQ$ が対角行列になるような可逆行列 P, Q と対角行列 D, D' を求めよ．

$$\text{(a).}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b).}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ 6 & 3 & -4 & 4 \\ 5 & -1 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

（解答）A の固有多項式は

$$\det(tE_4 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & x-4 & -2 & -2 \\ -6 & 3 & x+1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x-4 & -2 & -2 \\ 3 & x+1 & 3 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)\begin{vmatrix} x-4 & -2 \\ 3 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)^2.$$

（最初の等号は第 1 行での余因子展開，次の等号は第 3 行での余因子展開による）.

固有値 1 について $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{並び替え}]{3\text{ 行 }+2\text{ 行 }+4\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} t$. 次に $A\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}$ を解くと，以下より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} v$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行 }+6\times 1\text{ 行}]{2\text{ 行}-6\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}]{2\text{ 行}/(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

それぞれ $\boldsymbol{v}$ を表すのに必要なパラメータの数が，固有多項式の重複度に等しいので，A は対角化可能であり，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ となる．

B の固有多項式をもとめる.

$$\begin{pmatrix} t-1 & -5 & -1 & 5 \\ -4 & t-1 & 4 & -5 \\ -6 & -3 & t+4 & -4 \\ -5 & 1 & 5 & t-8 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列 }+4\text{ 列}} \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & t-6 & 4 & -5 \\ -6 & -7 & t+4 & -4 \\ -5 & t-7 & 5 & t-8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{ 列 }+5\times 3\text{ 列}} \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & t-6 & 4 & 15 \\ -6 & -7 & t+4 & 5t+16 \\ -5 & t-7 & 5 & t+17 \end{pmatrix}$$

だから，第 1 行での余因子展開より

$$\det(tE_4 - B) = (t-1)\begin{vmatrix} t-6 & 4 & 15 \\ -7 & t+4 & 5t+16 \\ t-7 & 5 & t+17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & t-6 & 15 \\ -6 & -7 & 5t+16 \\ -5 & t-7 & t+17 \end{vmatrix}.$$

それぞれの小行列式を求める.

$$\begin{pmatrix} t-6 & 4 & 15 \\ -7 & t+4 & 5t+16 \\ t-7 & 5 & t+17 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}-3\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -(t+2) \\ -7 & t+4 & 5t+16 \\ t-7 & 5 & t+17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 列 }+1\text{ 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(t+2) \\ -7 & t-3 & 5t+16 \\ t-7 & t-2 & t+17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行 }+7\times 1\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(t+2) \\ 0 & t-3 & -2(t-1) \\ t-7 & t-2 & t+17 \end{pmatrix}$$

なので，サラスの方法より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t-6 & 4 & 15 \\ -7 & t+4 & 5t+16 \\ t-7 & 5 & t+17 \end{vmatrix}. &= (t-3)(t+17) + (t-3)(t-7)(t+2) + 2(t-2)(t-1) \\ &= (t-1)(t^2-4t+5). \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & t-6 & 15 \\ 6 & -7 & 5t+16 \\ 5 & t-7 & t+17 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-1\text{ 行}} \begin{pmatrix} 4 & t-6 & 15 \\ 6 & -7 & 5t+16 \\ 1 & -1 & t+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{ 行}-6\times 3\text{ 行}]{1\text{ 行}-4\times 3\text{ 行}} \begin{pmatrix} 0 & t-2 & 7-4t \\ 0 & -1 & -t+4 \\ 1 & -1 & t+2 \end{pmatrix}$$

も合わせると

$$\det(tE_4 - B) = (t-1)(t-1)(t^2-4t+5) + \begin{vmatrix} t-2 & 7-4t \\ -1 & -t+4 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2)^2.$$

固有値 1 について $B\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ -6 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行}-4\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -6 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\text{ 行}\leftrightarrow 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ -6 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[4\text{ 行 }+5\times 1\text{ 行}]{3\text{ 行 }+6\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{3\text{ 行}-2\text{ 行}-4\text{ 行} \\ 4\text{ 行}-2\text{ 行} \\ \text{並び替え}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{ 行 }+5\times 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，解のパラメータは 1 個で，これは固有多項式 $\det(tE_4-B)=(t-1)^2(t-2)^2$ における $t=1$ の重複度 2 より小さいため，B は対角化不可能である．

（コメント）A については，$P^{-1}AP$ を計算せずに求めることができるというのがポイントです．B については，固有値 1 について $B\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ を調べた段階で対角化不可能性がいえます．この問題が解ければ，とりあえず行列と行列式はマスターしているといえるでしょう．ちなみに $(B-E_4)(B-2E_4)\neq O$ を確認することで B の対角化不可能性を示す方法もあります（未習）．

$\boxed{2}$ 複素数 a に対して，3 次の複素正方行列 A を次のように定める．A が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ（東大数理の院試の一部）．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 3 \end{pmatrix}.$$

（解答）以下より A の固有値が重根をもつ条件は $3+a^2=4$ であり，このとき固有多項式は $(\lambda-2)^3$ になる．固有値がすべて異なれば対角化可能なのは一般論なので，$a^2=1$ の場合を考える．このとき，A が対角化可能ならば $P^{-1}AP=2E_3$ と適当な可逆行列 P によってなるはずだが，これは $A=P(2E_3)P^{-1}=2E_3$ を導く．$a^2=1$ のとき $A\neq 2E_3$ なので，求める答えは $a^2\neq 1$.

$$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -a \\ -1 & a & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -a \\ a & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3+a^2).$$