(1a) 固有多項式は

$$\begin{vmatrix} t-a & b-1 \\ a-1 & t-b \end{vmatrix} = (t-a)(t-b)-(a-1)(b-1)$$
$$= t^2-(a+b)t+(a+b-1) = (t-1)(t-(a+b-1))$$

なので，固有値は $t = 1, a+b-1$（$a, b < 1$ なので $1 > a+b-1$ に注意）.

(1b) 行列のサイズと同じ数の固有値をもつので，A は対角化可能である．

$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ を解くと（$1-a \neq 0$ に注意），以下より $\boldsymbol{v} = \binom{1-b}{1-a}t$（$t$ はパラメータ）.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-a & b-1 & 0 \\ a-1 & 1-b & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行 }+1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cc|c} 1-a & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$A\boldsymbol{v} = (a+b-1)\boldsymbol{v}$ を解くと（$1-a \neq 0, 1-b \neq 0$ に注意），以下より $\boldsymbol{v} = \binom{1}{-1}t$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} b-1 & b-1 & 0 \\ a-1 & a-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行}/(b-1), 2\text{ 行}/(a-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行}-1\text{ 行}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって以下の P, D について $P^{-1}AP = D$ となる．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1-b \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1c) $A^n = PD^nP^{-1}$ だが，$0 < a, b < 1$ より $|a+b-1| < 1$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} A^n = P\left(\lim_{n\to\infty} D^n\right)P^{-1} = \frac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} 1 & 1-b \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-a & b-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} 1-b & 1-b \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}.$$

(2a) 固有多項式を求める．以下の変形と，サラスの方法より $(t+8)(t-1)^2$ と求まる．

$$\begin{pmatrix} t+8 & -9 & 9 \\ -9 & t+8 & -9 \\ -9 & 9 & t-10 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列 }+3\text{ 列}} \begin{pmatrix} t+8 & 0 & 9 \\ -9 & t-1 & -9 \\ -9 & t-1 & t-10 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-2\text{ 行}} \begin{pmatrix} t+8 & 0 & 9 \\ -9 & t-1 & -9 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

$A\boldsymbol{v} = -8\boldsymbol{v}$ を解くと，以下より $\boldsymbol{v} = {}^t(-1, 1, 1)s$（$s$ はパラメータ）.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 9 & 0 \\ -9 & 0 & -9 & 0 \\ -9 & 9 & -18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{ 行}\leftrightarrow 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ -9 & 9 & -18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3\text{ 行}-1\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{3\text{ 行 }+2\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ を解くと，以下より $\boldsymbol{v}={}^t(1,1,0)s+{}^t(1,0,-1)t$（$s,t$ はパラメータ）．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -9 & 9 & 0 \\ -9 & 9 & -9 & 0 \\ -9 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{2\text{ 行 }+1\text{ 行}\\ 3\text{ 行 }+1\text{ 行}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって以下の P,D について $P^{-1}AP=D$ となる．

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2b) 存在しない．実行列 B について $A=B^2$ であれば $\det A=(\det B)^2\geq 0$ だが，今 $\det A=\det D=-8$ となっている．

(2c) 存在する．実際 $C=P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ が求める C の 1 つである．

（コメント） $\boxed{4}$， $\boxed{5}$ともに D は計算しなくても求まるというのがポイントです．

$\boxed{3}$ (a) M の各列の和が 1 なので $\boldsymbol{v}=(1,1,1,1)$ について，$\boldsymbol{v}M=\boldsymbol{v}$ である．これは ${}^tM\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ ということである（ここで $\boldsymbol{u}={}^t\boldsymbol{v}$）．つまり ${}^tM$ は固有値 1 をもつ．正方行列 A の固有多項式を $f_A(\lambda)$ と書くとき，$f_A(\lambda)=f_{{}^tA}(\lambda)$ だから M も固有値 1 をもつ．
(b) まず M の固有値 λ について $|\lambda|\leq 1$ を示そう．(a) と同様に $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\neq(0,0,0,0)$ を $\boldsymbol{x}M=\lambda\boldsymbol{x}$ ととる（ここで $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$）．$N=1,2,3,4$ を $1\leq\forall i\leq 4, |x_i|\leq|x_N|$ となるように選ぶ．仮定より $x_N\neq 0$ であることに注意する．いま

$$M_{1,N}x_1+M_{2,N}x_2+M_{3,N}x_3+M_{4,N}x_4=\lambda x_N$$

だが（$\boldsymbol{x}M=\lambda\boldsymbol{x}$ の第 N 成分に注目した），三角不等式よりと N の選択より

$$\begin{aligned}|\lambda||x_N| &\leq |M_{1,N}||x_1|+|M_{2,N}||x_2|+|M_{3,N}||x_3|+|M_{4,N}||x_4| \\ &\leq M_{1,N}|x_N|+M_{2,N}|x_N|+M_{3,N}|x_N|+M_{4,N}|x_N|=|x_N|\end{aligned}$$

より $|\lambda|\leq 1$ がえられた（注：ここで $\forall i, M_{i,N}\neq 0$ なら，等号成立のとき $x_1=x_2=x_3=x_4$ が結論でき，$\lambda=1$ でなければ $|\lambda|<1$ がいえる．この M では M^2,M^3 も考えると同じ議論が可能）．

さて $\lambda\neq 1$ だが $|\lambda|=1$ なる $f_M(\lambda)=0$ の解 μ があるとして矛盾を導く．以下の第 4 列での余因子展開より $f_M(\lambda)=\lambda^4-3\lambda^2/4-\lambda/8-1/8$ なので，$\mu\neq -1$．f_M は実数係数なので $\overline{\mu}(\neq\mu)$ もまたこのような解である．つまり $f_M(\lambda)$ は $(\lambda-1)(\lambda-\mu)(\lambda-\overline{\mu})$ で割り切れる．以下の第 4 列での余因子展開より $f_M(\lambda)$ の定数項に注目すると $f_M(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-\mu)(\lambda-\overline{\mu})(\lambda+1/8)$ が結

論されるが，$f_M(-1/8) \neq 0$ が確認できる．

$$f_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & \lambda & -1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda^2/2 + 1/8) + \lambda(\lambda^3 - 1/8 - \lambda/4)$$
$$= \lambda^4 - 3\lambda^2/4 - \lambda/8 - 1/8.$$

(c) (b) より 1 は重複度 1 なので，M のジョルダン標準形 J は $J = J(1;1) \oplus J(\alpha;3), J(1;1) \oplus J(\alpha;2) \oplus J(\beta;1), J(1;1) \oplus J(\alpha;1) \oplus J(\beta;1) \oplus J(\gamma;1)$ のどれかである（$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ は（互いに異なるとは限らないが）すべて絶対値 1 未満．注：実際には最後のものになります）．

$$J(\alpha;3)^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \binom{n}{1}\alpha^{n-1} & \binom{n}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & \binom{n}{1}\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}, \quad J(\beta;2)^n = \begin{pmatrix} \beta^n & \binom{n}{1}\beta^{n-1} \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

より，いずれにせよ $\lim_{n\to\infty} J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (=: K)$ となる．$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)$ が $P^{-1}MP = J$ をあたえる可逆行列とすると，$\boldsymbol{p}_1$ は固有値 1 の固有ベクトルであることを注意する．$M^n\boldsymbol{e}_1 = PJ^nP^{-1}\boldsymbol{e}_1$ だが

$$PKP^{-1}\boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)KP^{-1}\boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})(P^{-1}\boldsymbol{e}_1)$$

なので，P^{-1} の $(1,1)$ 成分を a とすると $\lim_{n\to\infty} M^n\boldsymbol{e}_1 = a\boldsymbol{p}_1 (=: \boldsymbol{w})$ となる．よって $a \neq 0$ を示せばよい．M の各列の和が 1 なので，一般に $\boldsymbol{y} = M\boldsymbol{x}$ のとき $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ であるから（ここで $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4), \boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$），$\boldsymbol{w}$ の成分をすべて足すと 1 になる（注：つまり $\boldsymbol{w}$ はページランクベクトルです）．これは $a = 0$ では不可能である．

$\boxed{4}$ 絶交前の I のページランク $= A := \dfrac{27 + 24n + 5n^2}{90 + 37n + 26n^2 + 15n^3}$，絶交後の I のページランク $= B := \dfrac{80 + 25n + 35n^2}{304 + 38n + 113n^2 + 85n^3}$ で, $A - B = \dfrac{504 + 1304n - 988n^2 + 1520n^3 - 100n^4}{13680 + 494n + 9493n^2 + 3943n^3 + 1355n^4 + 1275n^5}$ と計算できます（詳細略ですが，行列のサイズが n に依存するので，正規化した固有ベクトルが求められることは自明ではありません）．ただし問題文の通り $\underline{\alpha = 0.2 \text{ としました}}$（一般の α での計算は行っていませんが，$0 < \alpha < 1$ では同様に，十分大きな n では $A - B < 0$ となるようです）．