ワイエルシュトラス M 判定法（優級数定理）とは，以下のようなものであった：$(f_n)_{n\geq 0}$ を $A\subseteq\mathbb{R}$ で定義された関数族で，「$\forall n\geq 0, \forall x\in A, |f_n(x)|\leq M_n$ かつ $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ が存在する」ような $(M_n)_{n\geq 0}$ が存在するとき，$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は A で（絶対）一様収束する．

$\boxed{1}$ (a) $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx\left(=\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n dx\right)$ とすると $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ なのだった（注：2017/10/31(C1)）．$I_1=[-\cos x]_1^{\pi/2}=1$ より $I_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}\cdot\dfrac{2n-2}{2n-1}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

(b) $A=[0,\dfrac{\pi}{2}], f_n=\dfrac{(-1)^n(\sin x)^{2n+1}}{(2n+1)!}, M_n=\dfrac{1}{(2n+1)!}$ として M 判定法を適用できる．

(c) $\sin(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ なので，$\sin(\sin x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ である．右辺は一様収束しているので $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi/2} f_n dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\right)^2$ が成り立つ．$a_n=\dfrac{2^n n!}{(2n+1)!}$ とすると，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!}\dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}=\dfrac{1}{2n+3}$ で，これは $n\geq 3$ のとき $<\dfrac{1}{8}$ である．$a_0=1, a_1=\dfrac{1}{3}, a_2=\dfrac{1}{15}, a_3=\dfrac{1}{105}$ より $a_0^2-a_1^2+a_2^2=\dfrac{67}{75}=0.8933\cdots, \left|\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n a_n^2\right|<a_3^2\left(1+\dfrac{1}{8^2}+\dfrac{1}{8^4}+\cdots\right)<2a_3^2<2\cdot 10^{-4}$ なので，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n^2=0.893\cdots$ となる（答：0.89)．

（コメント）一様収束に基づく解析的操作の順序交換の確認に，M 判定法はよく使われます．

$\boxed{2}$ (a) $\displaystyle\iint_{B_\rho} x^2 dxdy=\left(\int_0^{\rho} r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\right)=\frac{\rho^4}{4}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\rho^4$. 同様に $\displaystyle\iint_{B_\rho} y^2 dxdy=\frac{\pi}{4}\rho^4$ で，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=0$ より $\displaystyle\iint_{B_\rho} xydxdy=0$ である．

(b) f が $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2$ の近傍で定義された C^n 級関数のとき $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}}\left(f(\boldsymbol{h})-\sum_{k=0}^{n}(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y})^k f(\mathbf{0})\right)/|\boldsymbol{h}|^n=0$ なのだった（注：2017/7/18(A4)）．ここで $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2), |\boldsymbol{h}|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$ である．u は C^3 級（とくに C^2 級）なので，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^2, |\boldsymbol{h}|<\delta\Rightarrow|g(\boldsymbol{h})|<\varepsilon|\boldsymbol{h}|^2<\varepsilon$ となる．ここで

$$g(\boldsymbol{h})=u(\boldsymbol{h})-u(0,0)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)h_1+\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)h_2\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0)\frac{h_1^2}{2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(0,0)h_1h_2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0)\frac{h_2^2}{2}\right).$$

よって $\displaystyle\rho^2\varepsilon\geq\left|\iint_{B_\rho} g(x,y)dxdy\right|=\left|\iint_{B_\rho} u(x,y)dxdy-\pi\rho^2 u(0,0)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0)\right)\frac{\pi}{8}\rho^4\right|$.

($\because$(a) と $\iint_{B_\rho} dxdy=\pi\rho^2, \iint_{B_\rho} xdxdy=0=\iint_{B_\rho} ydxdy$)．

（コメント） C^3 級の仮定は平均値の定理を用いる解答向けかもしれませんが，C^2 級で十分です．

$\boxed{3}$ (a) $g_x=-6x(1+2x^2), g_y=2y(2y^2-3y^4)$ である．$g=g_x=g_y=0$ とすると，$g_x=0$ より $x=0$ なので，$g=y^4(1-y^2)=0$. これと $g_y=0$ より $y=0$ がえられる．よって $S=\{(0,0)\}$.

(b) $U(\boldsymbol{x};r):=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2\mid|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r\}$ とする．$\boldsymbol{a}\in A\subseteq\mathbb{R}^2$ が A で $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の極大（resp. 極小）点とは，$\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}\in A\cap U(\boldsymbol{a};\delta), f(\boldsymbol{a})\geq f(\boldsymbol{x})$（resp. $f(\boldsymbol{a})\leq f(\boldsymbol{x})$）であった．

まず $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}$ で $f(x,y)$ が極大・極小となる点の候補を求める．ラグランジュ未定乗数法より $\mathrm{grad}\, f = \lambda\, \mathrm{grad}\, g, g=0$ を解けばよい．すなわち

$$y^4 - y^6 = 3(x^2+x^4), \quad (2x, 2y) = \lambda(-6x(1+2x^2), 2y(2y^2-3y^4))$$

である．以下 $xy=0$ であることを示す．$xy\neq 0$ とすると $1+3\lambda(1+2x^2)=0, 1-\lambda(2y^2-3y^4)=0$ なので，$\lambda = 1/(2y^2-3y^4)$ から $2y^2-3y^4+3(1+2x^2)=0$ がえられる．よって $6x^2 = 3y^4-2y^2-3$. ゆえに $y^4-y^6 = \left(\dfrac{3y^4-2y^2-3}{2}\right)\left(1+\dfrac{3y^4-2y^2-3}{6}\right)$ となって $9y^8-8y^4-9=0$ をえるが，この解は明らかに $|y|>1$ なので $3(x^2+x^4)=y^4-y^6<0$ となって矛盾が生じる．$\therefore xy=0$.

$x=0$ とすると $y=\pm 1$ が，$y=0$ とすると $x=0$ がえられる．D で $f(0,\pm1)$ は極大になることを示す．いま $g_y\neq 0$ より，陰関数定理から「$\exists\delta>0, \exists\varphi:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ s.t.$\varphi(0)=\pm1, \forall x\in(-\delta,\delta), g(x,\varphi(x))=0$, $\varphi'(x) = -g_x/g_y = 3x(1+2x^2)/y(2y^2-3y^4)$」となる．これより

$$f'(x,\varphi(x)) = 2(x+\varphi(x)\varphi'(x)) = 2\left(x+\frac{3x(1+2x^2)}{2\varphi(x)^2-3\varphi(x)^4}\right).$$

だが，$\dfrac{3x(1+2x^2)}{2\varphi(x)^2-3\varphi(x)^4}$ は原点の近傍では $-3x$ のようにふるまうので，$f'(x,\varphi(x))$ は $x=0$ で符号が $-$ から $+$ に変わる．これは $f(0,\pm1)(=1)$ が（狭義の）極大であることを示している．

$\forall \boldsymbol{a}\in C, \exists r>0, C\cap U(\boldsymbol{a};r) = D\cap U(\boldsymbol{a};r)$ が成り立つので，C での極値点は D の極値点である．これから求める極値点は $(0,1)\in C$ で，ここで f は極大になる．

（コメント） 制約条件下での極値問題といえばラグランジュ未定乗数法ですが，極値判定にまでふみこんだのはこれがはじめてかもしれません．制約条件なしの極値問題におけるヘッシアン極値判定方法（やヘッシアンが退化するときの方法）も思い出してください．

$\boxed{4}$ (a) $A=\mathbb{R}, f_n(x) = 1/(x^2+n^4), M_n = 1/n^4$ として（ただし $n\geq 1$），M 判定法を適用する．f_n が連続なので，$s_m := \displaystyle\sum_{n=1}^{m} f_n$ も連続で，これの一様収束先の $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も連続である．

(b) (a) より $\displaystyle\int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^R \frac{dx}{(x^2+n^4)} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^R \frac{n^2dy}{n^4(y^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\arctan\frac{R}{n^2}$ がえられる（$n^2y=x$ とした）．いま $\forall\varepsilon>0, \exists M>0, \forall m>M, 0<\dfrac{\pi^2}{6}-\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}<\varepsilon, \sum_{n>m}\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ なので，$R>0$ をうまく選ぶと，任意の $r>R$ について $\forall m>M, 0<\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\pi^2}{6}-\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\arctan\frac{r}{n}<2\varepsilon, \sum_{n>m}\left|\frac{1}{n^2}\arctan\frac{r}{n}\right|<2\varepsilon$（前者は $\arctan x\nearrow\pi/2$（$x\to\infty$ のとき），後者は $\forall x\in\mathbb{R}, |\arctan x|<2$ による）．つまり $\forall\varepsilon>0, \exists R>0, \forall r>R, \left|\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\pi^2}{6}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\arctan\frac{r}{n}\right|<4\varepsilon$ となる．ゆえに $\displaystyle\lim_{B\to\infty}\int_0^B\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx = \frac{\pi^3}{12}$ である．

（コメント） $\displaystyle\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{m}<1$ と「望遠鏡の和」を使って，(a) で $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ の存在を示すのが，よくある初等的な方法です．