$\boxed{1}$ (a) $\boldsymbol{u}$ の直交補空間 $\langle \boldsymbol{u} \rangle^\perp := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\}$ の任意の元 $\boldsymbol{v}$ について $A(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ で，$A(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ だから，$\langle \boldsymbol{u} \rangle^\perp$ の基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ を選んで，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ での $A(\boldsymbol{u})$ の表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．よって $A(\boldsymbol{u})$ の固有値は -1 と 1 で，それぞれ重複度は 1,2 である．

(b) 直接計算により $A(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A(\boldsymbol{u})A(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ と求まる．つまり $A(\boldsymbol{u})A(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{e}_1 \mapsto \boldsymbol{e}_2 \mapsto \boldsymbol{e}_3 \mapsto \boldsymbol{e}_1$ とする線形変換なので，${}^t(1,1,1)$ が方向ベクトルで原点を通る直線を回転軸とする $120°$ 回転である（注：S1 の共通資料の確認問題にもあります）．

（コメント） (a) は $\boldsymbol{u} = {}^t(x, y, z)$ とおいて直接計算してもよいでしょう．線形変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x}$ は，$\boldsymbol{u}$ を法線ベクトルにもち原点を含む平面（$= \langle \boldsymbol{u} \rangle^\perp$）に関する「折り返し」です．一般に回転 M の軸は $M\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ を解いてえられます．

$\boxed{2}$ (a) 以下より $a(a-1) = 0$ なら $\operatorname{rank} A_1 = 3$ で，それ以外なら $\operatorname{rank} A_1 = 4$ である．

$$A_1 \xrightarrow{3\text{ 行}-4\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[+3\text{ 行}\times(1-a)]{4\text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & a(a-1) \end{pmatrix}.$$

(b) A_2 は $a(a-1) \neq 0$ ならば pivot を 4 つもつ階段行列になっていて，$a = 0, 1$ のときは pivot を 3 つもつ階段行列になっている．また $A_3 := (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & a(a-1) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので（2 列から 1 列の a 倍を引いた），$a(a-1) \neq 0$ のとき $\operatorname{rank} A_3 = 2$ で，それ以外なら $\operatorname{rank} A_3 = 1$．

$$\therefore \dim V_1 = \dim V_2 = \begin{cases} 1(= 5-4) & (a(a-1) \neq 0) \\ 2(= 5-3) & (a(a-1) = 0) \end{cases}, \quad \dim V_3 = \begin{cases} 2 & (a(a-1) \neq 0) \\ 1 & (a(a-1) = 0). \end{cases}$$

よって $\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 = 5$ となるには $a = 0, 1$ でなければならず，これらを以下調べる．

$\underline{a = 1 \text{ のとき}}$:$V_1$ の基底として ${}^t(-1,0,0,1,0), {}^t(0,0,0,0,1)$ が, V_2 の基底として ${}^t(0,1,0,0,0), {}^t(-1,0,-1,1,0)$ が，V_3 の基底として ${}^t(1,1,0,0,0)$ がとれる．以下より（それぞれ第 5 行，第 2 列，第 3 列で余因子展開した），これらを並べた 5 つのベクトルは $\mathbb{C}^5$ の基底になっている．よって $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathbb{C}^5$．

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\underline{a=0\text{ のとき}}$：$V_1$ の基底として ${}^t(-1,0,-1,1,0), {}^t(0,0,-1,0,1)$ が，V_2 の基底として ${}^t(0,0,1,0,0), {}^t(-1,0,0,1,0)$ が，V_3 の基底として ${}^t(1,0,0,0,0)$ がとれる．これら 5 つのベクトルはいずれも第 2 成分が 0 なので，これらが $\mathbb{C}^5$ を生成することはない．とくに $V_1+V_2+V_3 \subsetneq \mathbb{C}^5$ である（注：$+$ は $\oplus$ の誤植ではない）．

（コメント） 授業で直和を扱っていたようなので出題してみました．

$\boxed{3}$ (a) 以下より A の固有値が重根をもつ条件は $3+a^2=4$ であり，このとき固有多項式は $(\lambda-2)^3$ になる．固有値がすべて異なれば対角化可能なのは一般論なので，$a^2=1$ の場合を考える．このとき，A が対角化可能ならば $P^{-1}AP=2E_3$ と適当な可逆行列 P によってなるはずだが，これは $A=P(2E_3)P^{-1}=2E_3$ を導く．$a^2=1$ のとき $A \neq 2E_3$ なので，求める答えは $a^2 \neq 1$．

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -a \\ -1 & a & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -a \\ a & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3+a^2).$$

(b) A と B が相似であれば固有多項式が一致するので，以下の計算（左から 2 つめの $=$ は「第 1 列を他の列に足し引きする」より，次の $=$ は「第 3 行を第 1 行に足す」による）より $3+a^2=6-b$ でなければならない．$a^2 \neq 1$ であれば A と B は同じ固有値を 3 つずつもつので，同じ対角行列に対角化可能である．したがって A と B は相似である．

$$|\lambda E_3 - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -b & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -3 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda-b & 2-\lambda \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-b & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+6-b).$$

以下 $a=\pm1, b=2$ の場合を考える．A の JNF を決定するため $A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ を考える．$2E_3-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$ のランクは $a=1$ なら 1 で，$a=-1$ なら 2 なので，$A\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}$ の解空間の次元はそれぞれ $2,1$ となり，A の JNF は $J(2;2)\oplus J(2;1), J(2;3)$ となる．一方 $2E_3-B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ のランクは明らかに 1 なので，B の JNF は $J(2;2)\oplus J(2;1)$ である．まとめると，A と B が相似になる必要十分条件は「$a^2+b=3$ で $b \neq 2$」または「$(a,b)=(1,2)$」である．

（コメント） これは（というか$\boxed{1}$から$\boxed{3}$は）東大数理の院試ですが，$\boxed{3}$がすらすら解ければ，だいたいどこの院試を受けても線形代数が原因で落ちることはないと思います．

$\boxed{4}$ 詳細は省きますが，$\underline{m \geq 2\text{ での}}$ 答えは「A の JNF が 1 つの細胞からなるとき」となります．

$\boxed{5}$ 絶交前の I のページランク $= A := \dfrac{27+24n+5n^2}{90+37n+26n^2+15n^3}$，絶交後の I のページランク $= B := \dfrac{80+25n+35n^2}{304+38n+113n^2+85n^3}$ で，$A-B = \dfrac{504+1304n-988n^2+1520n^3-100n^4}{13680+494n+9493n^2+3943n^3+1355n^4+1275n^5}$ と計算できます（詳細略ですが，行列のサイズが n に依存するので，正規化した固有ベクトルが求められることは自明ではありません）．ただし問題文の通り $\underline{\alpha=0.2\text{ としました}}$（一般の α での計算は行っていませんが，$0<\alpha<1$ では同様に，十分大きな n では $A-B<0$ となるようです）．