線形代数学演習まとめ (ver.1) 2016/12/07 土岡俊介

1 用語集

体 (field) 加減乗除（四則演算）ができるような数の体系．集合 K に加法 $+ : K \times K \to K$ と乗法 $\times : K \times K \to K$ と呼ばれる 2 つの写像が定義されていて，いくつかの公理を満たすものとして抽象化・形式化される．$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ が授業で登場した．

行列 (matrix) $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ とは，$m \times n$ の表に K の元を配置したもの．

行列に付随する線型写像 (linear map associated with a matrix) $m \times n$ 行列 A は，K 線型写像 $F_A : K^n \to K^m, \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ を引き起こす．逆に，任意の K 線型写像 $f : K^n \to K^m$ はただ 1 つの $m \times n$ 行列 A によって $f = F_A$ と書くことができる．

転置 (transposition) $m \times n$ 行列 A を，対角線で折り返して得られる $n \times m$ 行列 ${}^tA$ のこと．

正則行列 (invertible matrix) $n \times n$ 行列 A であって，ある $n \times n$ 行列 B が存在して，$AB = E_n = BA$ となるもの（非自明な定理として，$AB = E_n \Leftrightarrow BA = E_n$ が証明できる）．この B は唯一つ存在することが証明でき，$B = A^{-1}$ と書かれる．いくつかの同値な特徴づけを持つ：

1. $\det(A) \neq 0$
2. $\mathrm{rank}(A) = n$
3. $(A|E_n)$ を行基本変形のみで $(E_n|B)$ にできる（このとき $B = A^{-1}$）
4. $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とすると $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は K^n の基底

共役 (conjugate) $n \times n$ 行列 A と B は，ある可逆行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき共役の関係にあるという（共役関係は同値関係である）．

係数行列と拡大係数行列 (expanded coefficient matrix) n 未知変数 m 立連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

は，行列積を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書き直せる．ここで $A := (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ は $m \times n$ 行列で，$\boldsymbol{x} := (x_i)_{i=1}^n$ は n 次元ベクトル，$\boldsymbol{b} := (b_i)_{i=1}^m$ は m 次元ベクトルである．A がこの連立方程式の係数行列で，$m \times (n+1)$ 行列 $(A, \boldsymbol{b})$ は拡大係数行列と呼ばれる．

クラメルの公式 (Cramer's formula) 上で $m = n$ のとき，係数行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ のように n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を並べた形で書く．連立方程式の解は，$\det A \neq 0$ ならば

$$x_1 = \frac{\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)}, \quad x_2 = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_n)}, \quad \cdots$$

行基本変形 (basic row operation) 以下の 3 つの操作のこと

1. i 行と j 行を入れ替える（$i \neq j$）
2. i 行に，K の非ゼロ元 c をかける（$c \neq 0$）
3. i 行に，j 行の K の元 c 倍を加える（$i \neq j, c \in K$）

連立方程式の拡大係数行列に行基本変形を施しても，同値な連立方程式が得られる．

掃出し法 (Gaussian elimination, row reduction)　行列に行基本変形を施して，階段行列にすること．連立方程式の拡大係数行列に掃出し法を施すと，同値で簡単な連立方程式が得られる．

後退代入 (backward substitution)　階段行列が係数行列の連立方程式を，逆向きに体系的に解く（あるいは解けないことを示す）こと．

階段行列 (echelon matrix)　ある r が存在して

1. $(r+1)$ 行目から最終行までは，すべて 0
2. 1 行目から r 行目の各行には，pivot が 1 つずつ存在して
   - pivot は「だんだん右に」分布する
   - どの pivot も「その左と下」の数（ないかもしれない）は 0 になっている

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j_1} & \cdots & & & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{r,j_r} & \cdots \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}$$

のような行列のこと（ここで $j_1 < j_2 < \cdots < \cdots < j_r$ かつ $a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{r,j_r} \neq 0$）．ここで非ゼロな数 $a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \cdots, a_{r,j_r}$ は **pivot**（枢軸）と呼ばれる．

ランク標準形 (rank normal form)　対角線に 1 が連続していくつか並んで，他は 0 である

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

のような行列．$m \times n$ 行列 A に，行基本変形と列基本変形をうまく施すと，必ずランク標準形にできる．さらに得られるランク標準形は一意的である．これは A と $P^{-1}AQ$ を同値と思う同値関係の標準形とも同じである．

ランク (階数，rank)　$m \times n$ 行列 A の $\mathrm{rank}(A)$ は，いくつかの同値な特徴づけを持つ：

1. A のランク標準形の 1 の個数 r
2. A を掃出し法で階段行列にしたときの pivot の個数
3. $\dim \mathrm{Im}\, F_A$
4. ある r 次小行列式がゼロにならない，最大の $0 \leq r \leq \min\{m,n\}$

小行列 (submatrix)　$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq n\leq n}$ の r 次小行列とは，$(a_{ij})_{i\in I, j\in J}$ の形で得られる A の部分 r 次正方行列のことである（ここで $I \subseteq \{1,\cdots,m\}$ と $J \subseteq \{1,\cdots,n\}$ は $|I| = |J| = r$）．r 次小行列は ${}_mC_r \times {}_nC_r$ 個存在する．

置換 (permutation)　n 点集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ からそれ自身への全単射 $\sigma : \{1,2,\cdots,n\} \xrightarrow{\sim} \{1,2,\cdots,n\}$ のこと．$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ のように 2 行表示される．

行列式 (determinant)　$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ について

$$\det A = \sum_{\sigma : n\ \text{の置換}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

転倒数 (number of transpositions)　$\mathrm{trans}(\sigma) = |\{1 \le i < j \le n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}|$.

符号 (signature)　$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = (-1)^{\mathrm{trans}(\sigma)}$.

サラスの方法 (Sarrus's rule)　2×2 行列と 3×3 行列の行列式を定義通り求めること．

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

余因子 (cofactor)　$n \times n$ 行列 A の i 行 j 列を削除し，$(n-1) \times (n-1)$ 行列 B を得たとする．$(-1)^{i+j} \det B$ を A の (i,j) 余因子と呼び，$\widetilde{a}_{ij}$ と書く．

余因子行列 (cofactor matrix)　$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ について，

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{n2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{a}_{2n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

で与えられる $n \times n$ 行列（転置に注意）．$\det A \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$.

余因子展開 (cofactor expansion)　$n \times n$ 行列 A の $\det A$ を再帰的に求める方法．

(i 行)　$\det A = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in}$

(j 列)　$\det A = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a}_{nj}$

以下は，4×4 行列の 1 列に関する余因子展開である．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

最小多項式 (minimal polynomial)　$n \times n$ 行列 A の最小固有多項式 $\varphi_A(t)$ とは，条件

- $\varphi_A(t)$ は定数多項式でなく（つまり 1 次以上）
- 最高次係数は 1（つまりモニック）
- $\varphi_A(A) = O$

を満たす最低次数の多項式（ただ 1 つ存在することが示せる）．

固有多項式 (eigen polynomial, characteristic polynomial)　$n \times n$ 行列 A の固有多項式 $\chi_A(t)$ は $\chi_A(t) = \det(tE_n - A)$ と定義される．実は固有値は固有多項式の解と同じである．

ケーリー・ハミルトンの定理 (Cayley-Hamilton theorem)　$n \times n$ 行列 A について，$\chi_A(A) = O$. これから $\varphi_A(t)$ は $\chi_A(t)$ を割り切ることが分かる。

固有値・固有ベクトル (eigenvalue, eigenvector)　$n \times n$ 行列 A について，$\lambda \in K$ が A の固有値であるとは，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{v} \in K^n$ が存在することを言う．このとき $\boldsymbol{v}$ を固有値 λ の固有ベクトルと呼ぶ．

固有空間 (eigenpolynomial, characteristic polynomial)　$n \times n$ 行列と $\lambda \in K$ について，

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in K^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

と定義される．つまり：

- $\lambda \in K$ が A の固有値 $\Leftrightarrow V_\lambda \neq \{\boldsymbol{0}\}$
- $\boldsymbol{v}$ が A の固有値 λ の固有ベクトル $\Leftrightarrow \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{v} \in V_\lambda$

対角化 (diagonalization)　$n \times n$ 行列 A について，可逆行列 P をうまく選んで，$P^{-1}AP$ を対角行列にすること．

2　行列式 (A, B を $n \times n$ 行列とする)

- $\boldsymbol{0} \neq \exists \boldsymbol{v} \in K^n, A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$（固有値が固有多項式の根である理由）
- $\det(E_n) = 1, \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$（乗法保存則）
- $\det(A) = \det({}^t A)$（転置不変性）
- $K = \mathbb{R}$ のとき，$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ のように n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を並べた形で書くと $\det(A)$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の張る平行 6 面体の符号付き体積である（図形的意味）．
- $\det : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ は多重線形性と交代性を持ち、正規化化条件 $\det(E_n) = 1$ に従う。逆に、写像 $F : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ が多重線形性と交代性を持つならば、ある $c \in K$ が存在して（実は $c = F(E_n)$ である）、$F = c \cdot \det$ が成り立つ（det の特徴づけ）。

3　行列の対角化 ($K = \mathbb{C}$ で A を $n \times n$ 行列とする)

- A が対角化できる必要十分条件は，固有多項式・固有空間・最小多項式のどれでも言える：

(固有多項式)　固有多項式が $\chi_A(t) = (x - \alpha_1)^{m_{\alpha_1}} \cdots (x - \alpha_s)^{m_s}$ と分解する場合（ただし $i \neq j$ ならば $\alpha_i \neq \alpha_j$ で $m_1, \cdots, m_s \geq 1$），任意の $1 \leq i \leq s$ について $\dim V_{\alpha_i} = m_i$ が成り立つ（対角化可能と限らない場合には $1 \leq \dim V_{\alpha_i} \leq m_i$ が成り立つ）

(固有空間)　固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とすると（ただし $i \neq j$ ならば $\alpha_i \neq \alpha_j$），$\mathbb{C}^n = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_s}$.

(最小多項式)　最小多項式が $\varphi_A(t)$ が重根を持たない

- 特に $\chi_A(t) = 0$ が n 個の解を持つ（$\Leftrightarrow A$ が n 個の固有値を持つ）ならば，A は対角化可能．
- A が対角化可能な場合，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような可逆行列 P は，

$$P = \left(\boldsymbol{p}_{1,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1,d_1}, \boldsymbol{p}_{2,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2,d_2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{s,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{s,d_s}\right)$$

と取れ（$\boldsymbol{p}_{\ell,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{\ell,d_\ell}$ は V_{α_ℓ} の基底），このとき $D = P^{-1}AP$ は，対角線に

$$\underbrace{\alpha_1, \cdots, \alpha_1}_{d_1\text{ 個}}, \underbrace{\alpha_2, \cdots, \alpha_2}_{d_2\text{ 個}}, \cdots, \underbrace{\alpha_s, \cdots, \alpha_s}_{d_s\text{ 個}}$$

が，この順に並んだ対角行列になる（これは計算することなく求まる）．