線形代数のレポートの$\boxed{4}$番について，いくつか問い合わせをもらったり，解答してくれた人には個別にコメントを書いたりしました．一応，少し解説しておこうと思います．準備として

$$\Omega = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid (Z - E_n)^n = O\}$$

とします．$(Z - E_n)^n = O$ は $\exists N > 0, (Z - E_n)^N = O$（すなわち「$Z - E_n$ はべき零行列である」）と同値です（Cayley-Hamilton の定理の系）．ここでは以下の命題の解説を行います．

$$(\diamondsuit) \qquad \forall m \geq 1, \forall A \in \Omega, \exists! X \in \Omega, X^m = A.$$

これから $m \geq 2$ のとき「$\det A \neq 0$ なる $n \times n$ 行列に $X^m = A$ なる X が丁度 m 個存在するのは，$\mathsf{JNF}(A)$ が 1 つの細胞からなるときに限る」を示すのは容易です：

まず $\mathsf{JNF}(A) = J(1;n)$ なる A について，$X^m = A$ の解が丁度 m 個存在することを示す．$\mathsf{JNF}(X)$ もただ 1 つの細胞からなることは容易にわかる（略）．よって $\mathsf{JNF}(X) = J(\alpha;n)$ とすると，$X^m = A$ より det をとると $\alpha^m = 1$ なので，α は 1 の m 乗根のどれかでなければならない．いま $Y := \alpha^{-1}X$ も $Y^m = A$ をみたすが，$Y \in \Omega$ なので，$(\diamondsuit)$ より X は高々 m 個ある．実際に m 個あることは明らかである．

一般に $0 \neq \beta \in \mathbb{C}$ と $A \in M_n(\mathbb{C})$ について，$X^m = A$ であることと，$(\gamma X)^m = \beta^{-1}A$ であることは同値である．ここで $0 \neq \gamma \in \mathbb{C}$ は $\gamma^m = 1/\beta$ となるように 1 つ選んでいる．$\mathsf{JNF}(A) = J(\beta;n)$ で $\beta \neq 0$ のとき，$\mathsf{JNF}(\beta^{-1}A) = J(1;n)$ なので γX は丁度 m 個存在し，したがって X は丁度 m 個存在する．

以上より，一般に $\mathsf{JNF}(A) = \bigoplus_{k=1}^{\ell} J(\alpha_k;n_k)$ となっているとき（ここで $\forall k, \alpha_k \neq 0$），$X^m = A$ の解は少なくとも m^ℓ 個ある．したがって $m \geq 2$ のとき「」がわかった．

さて $(\diamondsuit)$ に戻りましょう．$Z \in \Omega$ について

$$\log(1+x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

に $x = Z - E_n$ を代入することで，$\log Z$ と $Z^{1/m}$ が定義でき，以下が成り立ちます：

1. $\forall Z \in \Omega, \exp(\log Z) = Z, (Z^{1/m})^m = Z$
2. $Z_1, Z_2 \in \Omega$ が可換ならば，$Z_1Z_2 \in \Omega$ で，$\log(Z_1Z_2) = \log Z_1 + \log Z_2$

これらを認めると，$X^m = A \in \Omega$ となる $X \in \Omega$ の存在については $X = A^{1/m}$ とすればよく，X の一意性については以下のようにすればよいです．

$X \in \Omega$ が $X^m = A$ とすると，$m \log X = \log A$ なので，$\log X$ は A から決まる．よって $X = \exp(\log X) = \exp(\frac{1}{m}\log A)$ は A から決まる．すなわち X は高々 1 つ存在する．

以上の解答はあくまで一例で，他にも解法はいろいろあります．