$\boxed{7A}$ (1) $\sqrt{2}$

(2) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ より $\arg z = \frac{7\pi}{4}$ $\left(\text{または } \arg z = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$

ここで $n \in \mathbb{Z}$

(3) $1+i$

(4) $5+2i$

(5) $-3-4i$

(6) $(1-i)(4+3i) = 4-4i+3i+3 = 7-i$

(7) $z/w = (1-i)\cdot\frac{4-3i}{25} = \frac{1-7i}{25}$

(8) $w/z = 4+3i\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{1+7i}{2}$

$\boxed{7B}$ (1) $= 1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$

(2) $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(4) $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(5) $-1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

(6) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$\boxed{7C}$ (1) $Q=0,\ R=0$

(2) $Q=0,\ R=1$

(3) $Q=0,\ R=x$

(4) $Q=1,\ R=-(1+i)$

(5) $x^3 = (x^2+1+i)x - x(1+i)$ より $Q=x,\ R=-(1+i)x$

(6) $x^4 = x(D\cdot x - x(1+i))$

$= Dx^2 - (D-(1+i))(1+i) = D(x^2-(1+i)) + (1+i)^2$ より $Q = x^2-(1+i)$

$R = (1+i)^2 = 2i$

(7) $x^5 = x(D\cdot(x^2-(1+i)) + 2i)$ より $Q = x(x^2-(1+i))$

$R = 2ix$

(8) $x^6 = x(Dx(x^2-(1+i)) + 2ix)$

$= D(x^2(x^2-(1+i)) + 2i(D-(1+i))$ より $Q = x^2(x^2-(1+i)) + 2i$

$= x^4-(1+i)x^2+2i$

$R = -2i(1+i) = 2(1-i)$

$\boxed{7D}$ (1) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ (2) -1 (3) 1

(4) $\omega^3=1$ より $\omega^{100} = \omega^{3\cdot 33+1} = \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

(5) $\omega^{3n+1}+\omega^{3n+2}+\omega^{3n+3}=0$ を用いると (求める和) $= \omega^{100} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\boxed{7E}$ (1) $x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$ より $x=1$ (重複度は2)

$x=-1$ (〃 1)

(2) $x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2 = (x+i)^2(x-i)^2$ より $x=\pm i$ (重複度は2)

(3) $x^3-3ix^2-4i = (x+i)(x^2-4ix-4) = (x+i)(x-2i)^2$ より $x=-i$ (重複度は1)

$x=2i$ (〃 2)

$\boxed{7F}$ (1) $(x-1)(x+1)$ ($\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ での因数分解)

(2) $x^2+1 = (x+i)(x-i)$

in $\mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{C}[x]$

(3) $x^3+1 = (x+1)(x^2+x+1) = (x+1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

in $\mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{C}[x]$

(4) $x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

in $\mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{C}[x]$

(5) $x(x^3-4x^2+6x-4) = x(x-2)(x^2-2x+2) = x(x-2)(x-(1+i))(x-(1-i))$

in $\mathbb{R}[x]$ in $\mathbb{C}[x]$

$\boxed{3A}$ (1) $\sqrt{2}-1$ (2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}-1$ (3) $\sqrt{\dfrac{121}{100}}-1=\dfrac{1}{10}$ (4) $\sqrt{\dfrac{10201}{10000}}-1=\dfrac{1}{100}$

$\boxed{3B}$ (1) 各正数εについて、$\delta=\varepsilon$と正数δをとればよい。

(2) $0<\varepsilon<1$について、$\delta=\varepsilon$とすると、$0<|x-x_0|=|x|<\delta$のとき

$|f(x)-f(x_0)|=|x^2|<\delta^2<\varepsilon$ が成立する。

$\varepsilon\geqq 1$ ならば $\delta=\frac{1}{2}$ とすると、$0<|x|<\frac{1}{2}$ について $|x^2|<\frac{1}{4}<\varepsilon$ が成立する。

(3) $0<\varepsilon<1$ について、$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ とすると $0<|x+1|<\delta$ のとき

$|x^2-1|=|x+1||x-1|<3\cdot\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$ が成立する。

(さらに $\varepsilon\geqq 1$ ならば $\delta=0.1$ とすると $0<|x+1|<\delta$ のとき、$|x^2-1|<1.21-1=0.21<\varepsilon$)

ここで $|x-1|=|(x+1)-2|\underset{\substack{\uparrow\\ \text{三角不等式}}}{\leqq}|x+1|+2<\dfrac{\varepsilon}{3}+2<\dfrac{1}{3}+2<3$ を用いた。

$\boxed{3C}$ (1)(2) ともに $\lim_{x\to a}f(x)=b$ と同値である。

実際、まず $\lim_{x\to a}f(x)=b$ を仮定する。すなわち

$$\overbrace{「\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta_1(\varepsilon)>0 \text{ s.t. } \forall x \begin{pmatrix} 0<|x-a|<\delta \\ \Downarrow \\ |f(x)-b|<\varepsilon \end{pmatrix}」}^{(*)}$$

のとき $\delta=\delta_1(\varepsilon/2)$ とすると (1) が、$\delta=2\delta_1(\varepsilon)$ とすると (2) がみたされる。

逆に (1) のような δ をとると、(*) が成立している ($\because$ $|f(x)-b|<\varepsilon/2<\varepsilon$)

又 (2) のように δ をとると、$\delta_1=\delta/2$ とることで「 」が成り立つことが従う。

$\boxed{3D}$ (1) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cdot 1+\cos x}=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}$

に $\lim_{x\to x}\dfrac{\sin x}{x}=1$ と §3.3 を適用すると、$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(2) $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ は、題意より $x=0$ で連続である(ただし $f(0)=1$ と定義した)。

$f(t)=\log t$ とすると、これは $t=1$ で連続だから、§4.2 命題6 が適用できて、$\lim_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\log t}=\lim_{t\to 1}g(f(t))=g(0)=1$

3F (1), (3) Iは空でない有界閉区間で、$f(x)=x\sin x$は
連続関数なので、§5.4の定理2(31 page)より
最大値(と最小値)が存在する。

(2) 存在しない $\left(\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0\ \exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\quad \frac{\pi}{2}-\varepsilon<f(x) \text{ となっているが} \\ f(x')=\frac{\pi}{2} \text{ となる } x'\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ は存在しない} \end{array} \right)$

(4) 存在する

$I'=[0,\pi]$とする。(1), (3)と同様にfはI'で最大値をもつ。

$t\in I'$が最大値を与えるとき、 $t\in I$である($\because\ f(0)=0=f(\pi)<f(\frac{\pi}{2})$)。

$I'\supseteq I$より$\forall x\in I,\ f(x)\leqq t$となるので、$f$は$I'$で最大値$f(t)$をもつ。

3E (1) $f(x)=x^3-3x+3$とすると $f(-100)<0$, $f(100)>0$である。
よって§5.3の定理1より ある$x_0\in(-100,100)$について$f(x_0)=0$
となる。よって$f(x)=0$は実数解をもつ。($\because$ fは連続)

(2) $y=x^4-4x+4$は$y'=4(x^3-1)$より $x<+1$では単調減少
$x>+1$では単調増加である。
$x=1$のとき$y=1$なので $y=0$となるxは存在しない。

(3) $e^x\geqq0$より $x\geqq0$で$e^x=x$となりうるか調べればよい。このとき、
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\geqq1+x$ なので $e^x=x$となることはない。

(4) $g(x)=\cos x-x$とすると $g(0)=\overset{>0}{1}$, $g(100)<0$である。
よって(1)と同様に$g(x)=0$は実数解をもつ。

3D (3) $x=t^2\ (t>0)$とおくと $\sqrt{x}\log x=2t\log t$だから 求める極限は0.

(4) $x^x=e^{x\log x}$と変形すると、$\lim_{x\to0+0}x^x=e^0=1$ (以上は略解)

$\boxed{3D}$ (3) 詳しい解答

$\lim_{x\to 0+0} x\log x = 0$ より $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta_1(\varepsilon)>0$ s.t. $0<x<\delta \Rightarrow |x\log x|<\varepsilon$ である。 (*)

今、$\forall\varepsilon>0$, $0<x<\delta_1^2(\varepsilon/2) \Rightarrow |\sqrt{x}\log x|<\varepsilon$ を示そう。

実際 $\sqrt{x}\log x = 2\sqrt{x}\log\sqrt{x} < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ となっている

($0<\sqrt{x}<\delta_1(\varepsilon/2)$ と (*) による。)

(4) 詳しい解答 (3)の δ_1 を思い出す。

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto e^x$ はとくに $x=0$ で連続だから $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta_2(\varepsilon)>0$ s.t. $0<|x|<\delta \Downarrow |e^x-1|<\varepsilon$

今、$\forall\varepsilon>0$, $0<x<\delta_1(\delta_2(\varepsilon)) \Rightarrow |e^{x\log x}-1|<\varepsilon$ となっている。

よって $\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{x\log x} = 1$

$\boxed{3G}$ 全て $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ である。以下、ε-N 論法で示す。

(1) 任意の $\varepsilon>0$ について $N>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ を1つとる。すると $\forall n>N$, $|a_n|<\frac{1}{N^2}<\varepsilon$ である。

(2) 任意の $\varepsilon>0$ について $N>\frac{1}{\varepsilon^2}$ を1つとる。すると $\forall n>N$, $|a_n|<\frac{1}{\sqrt{N}}<\varepsilon$ である。

(4) 任意の $\varepsilon>0$ について $N>\frac{1}{\varepsilon}$ を1つとる。すると、$|r^n|<1$ と $n!\geqq n$ であることから

$\forall n>N$ $|a_n|<\frac{1}{N}<\varepsilon$ となる。

(5) $f(x)=\frac{\log x}{x}$ は $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$ より $x>e$ では単調減少であることに注意する。又、$\underbrace{x=e^t}_{(かつ\ t>0)}$ のとき $f(x)=\frac{t}{e^t}<\frac{t}{t^2/2}=\frac{2}{t}$ である。

($e^t\geqq 1+t+t^2/2$ を用いた)

よって任意の $\varepsilon>0$ について、$N>e^{2(\frac{1}{\varepsilon})}$ を $N>e$ となるようにとれば、

$\forall n>N$, $|a_n|<\varepsilon$ となる。

(3) 33ページのように $d = \frac{1}{|r|} - 1$ とすると、$d \in \mathbb{R}_{>0}$ で $|r| = \frac{1}{1+d}$ となる。

$n \geqq 2$ なら二項定理より $(1+d)^n \geqq 1 + nd + \frac{n(n-1)}{2}d^2$ が成り立つ。

よって $|nr^n| \leqq \frac{n}{1+nd+\frac{n(n-1)}{2}d^2} < \frac{n}{\frac{n^2}{4} \cdot d^2} = \frac{4}{d^2 n}$ をえる。

$\left(\frac{n(n-1)}{2} \geqq \frac{n^2}{4} \text{ if } n \geqq 2 \text{を用いた} \right)$

以上より任意の $\varepsilon > 0$ について、$N > \frac{4}{d^2 \varepsilon}$ を1つとれば、$\forall n > N$, $|a_n| < \varepsilon$ となる。