9A (1) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を解くと $a=b=1$。よって $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=1\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}$

(2) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を解くと $a=b=0$。よって $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}$

(3) $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を解くと $x=2, y=-1$。よって $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2\vec{a}-\vec{b}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ には解 $x, y\in\mathbb{R}$ が存在しないため、$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の線型結合で表すことはできない。

(5) $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を解くと、$x=-2, y=1$。よって $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-2\vec{a}+\vec{b}$

9B (1) なす角を θ とすると、余弦定理より $\cos\theta=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。よって $\theta=\pi/4$

(2) (1)と同様に、$\cos\theta=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\dfrac{1}{2}$。よって $\theta=\pi/3$

(3) (1)と同様に、$\cos\theta=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\3\\4\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\3\\4\end{pmatrix}\right\|}=\dfrac{9}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{27}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。よって $\theta=\pi/6$

9C $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$ なる直線 L の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ である。

(1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{2}$ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ のスカラー倍でないため、L と平行ではない。L のパラメータ表示 $\begin{aligned}x&=1+2t\\y&=-1+3t\\z&=2+4t\end{aligned}$ を代入すると $\dfrac{3+2t}{3}=\dfrac{2+3t}{4}=\dfrac{4+4t}{2}$

これを満たす $t\in\mathbb{R}$ は存在しないので、L と(1)の直線は交わらない。

(2) 与えられた直線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ なので、これは L と平行である。

(3) (1)と同様に与えられた直線は L と平行ではない。

$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{2}$ に L のパラメータ表示 $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=2+4t\end{cases}$ を代入すると

$\frac{2+2t}{3}=\frac{2+3t}{4}=\frac{2+4t}{2}$ これを満たす $t\in\mathbb{R}$ は存在しないので、L と(3)の直線は交わらない。

$\boxed{9D}$ (1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ より、求める直線の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ である。(よって、単位方向ベクトルは $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ である)

H と(1)の平面は $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ を共有するため、交差として得られる直線は $\begin{cases}x=-t\\y=2t+1\\z=-t\end{cases}$ である。

(2) (1)と同様に、$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ より、求める直線の単位方向ベクトルは $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ である。

H と(2)の平面は $\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ を共有するため、交差として得られる直線は $\begin{cases}x=-3t+1\\y=t-\frac{2}{3}\\z=2t+\frac{2}{3}\end{cases}$ である。

(3) (1)と同様に、$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ より、求める直線の単位方向ベクトルは $\frac{\pm1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ である。

H と(3)の平面は $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ を共有するため、交差として得られる直線は $\begin{cases}x=-t+1\\y=t\\z=0\end{cases}$ である。

(4) (1)と同様に、$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ より、求める直線の単位方向ベクトルは $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ である。

H と(4)の平面は $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ を共有するため、交差として得られる直線は $\begin{cases}x=-t\\y=1\\z=t\end{cases}$ である。

$\boxed{9E}$ (1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ より、平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を平面は含むため、平面の方程式は $z=1$ である。

(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ より，平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ を平面は含むため，平面の方程式は $x-y+z=2$ である。

(3) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ より，平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を平面は含むため，平面の方程式は $x-z=0$ である。

(4) $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ より，平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ である。

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を平面は含むため，平面の方程式は $x-3y+4z=2$ である。

$\boxed{9F}$ (1) $\begin{cases}x=s\\y=t\\z=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=s\\y=s\\z=t\end{cases}$

(3) $x+y+z=0$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ と直交する線型独立なベクトルは，例えば $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ であるから

さらに $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を平面は含むので

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{cases}x=s+t\\y=-s\\z=-t\end{cases}$

(4) (3) を思い出す。$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ を平面は含むので $\begin{cases}x=s+t+1\\y=-s\\z=-t\end{cases}$

(5) $x+2y+3z=1$ の法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ と直交する線型独立なベクトルは，例えば $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ で，さらに $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ を平面は含むので，$\begin{cases}x=2s+3t+1\\y=-s\\z=-t\end{cases}$

(ただし (1)〜(5) で，$s,t\in\mathbb{R}$ はパラメータ)

$\boxed{9G}$ (1) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\+4\\-3\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}$

$\boxed{9H}$ (1) $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}=6+4+2-(4+4+3)=1$ (2) $\det\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&-2\\1&1&3\end{pmatrix}=-6-2+2-(-4-2+3)=-3$

$\boxed{4A}$ (1) $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

(2) $f'(0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$ (これは25ページ例1で扱った)

$\boxed{4B}$ (1) $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,x^{-n}$ ($n\geqq 1$のとき) (2) $\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(3) $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)}$

$= \sum_{k=0,1,2}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)}$

$= \dfrac{n!\,x^2}{(1-x)^{n+1}} + \dfrac{n\cdot(n-1)!\,2x}{(1-x)^n} + \dfrac{2(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}\,\dfrac{n(n-1)}{2}\ \cancel{\dfrac{n!\,x(2-x)}{(1-x)^{n+1}} + 2(n-2)}$

$= \dfrac{n!\left(x^2+2x(1-x)+(1-x)^2\right)}{(1-x)^{n+1}} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ($n\geqq 2$のとき)

$f^{(1)}(x) = \dfrac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

(4) $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = xe^x + n\cdot e^x = (x+n)e^x$

$\boxed{4C}$ (1) $n=\infty$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^3 & (x\geqq 0)\\ -x^3 & (x\leqq 0)\end{cases}$ より $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & (x\geqq 0)\\ -3x^2 & (x\leqq 0)\end{cases}$ $f''(x)=\begin{cases} 6x & (x\geqq 0)\\ -6x & (x\leqq 0)\end{cases}$

が分かる。$f''(x)$は連続だが、$x=0$で微分不可能なので $n=2$

(3) $n=\infty$

(4) $n=\infty$

$\boxed{4E}$ (1) $-\log|\cos x|$ $\int \log$ $x\log x - x + C$

(2) $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$ より $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

(3) $\dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}\right)$ より $\displaystyle\int \frac{x}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{1-x^2}\right|$

(4) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とすると $dt = \dfrac{dx}{2}\cdot(1+t^2)$ で $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ である。よって

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2}dt = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$$

$\boxed{4D}$ (1) $-\log|\cos x|$

(2) $u = \log x$ とおくと、$du = \dfrac{dx}{x}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx = \int u\,du = \frac{\log^2 x}{2}$

(3) (2) と同様に $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log|\log x|$

(4) $u = 1+\sin^2 x$ とおくと、$du = 2\sin x\cos x\,dx$ $\therefore$ $\sin x\cos x\,dx = \dfrac{du}{2}$

よって $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\log|u| = \frac{1}{2}\log(1+\sin^2 x)$ $\left(\because\ 1+\sin^2 x > 0\right)$

$\boxed{4F}$ (1) $\forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}$ s.t. $|x|<\delta$ かつ $\sin\dfrac{1}{x} < 0$ となるので

とくに $y=f(x)$ は原点で局所的に最小にならないし、極小にもならない。

(2) $\sin\dfrac{1}{x} \geqq -1$ より $x\neq 0$ なら $f(x) = x^2\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right) \geqq 0$ である。

よって $y=f(x)$ は原点で局所的に最小になる。

$\forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}$ s.t. $|x|<\delta$ かつ $\sin\dfrac{1}{x} = -1$ となるので、$y=f(x)$ は原点で極小にならない。

(3) $x\neq 0$ なら $f(x) = x^2 + x^2\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right) \geqq x^2 > 0$ より、

$y=f(x)$ は原点で局所的に最小になるし、極小にもなる。