5A (1) 0 (2) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (3) 1 (4) 2 (5) 1 (6) $-\sqrt{2}$

(7) $\dfrac{\frac{1}{3}-3}{2} = -\frac{4}{3}$ (8) $\dfrac{5+\frac{1}{5}}{2} = \frac{13}{5}$ (9) 0 (10) $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{5}{3}}{\frac{3}{5}+\frac{5}{3}} = \dfrac{9-25}{9+25} = -\frac{8}{17}$

5B (1) $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ (2) $x = \frac{\pi}{6} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

(3) $x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{5\pi}{4} + 2m\pi \quad (n, m \in \mathbb{Z})$ (4) $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2m\pi$
$(n, m \in \mathbb{Z})$

5C (1) 0 (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $-\frac{\pi}{4}$ (4) 0

(5) $\frac{\pi}{3}$ (6) $\frac{\pi}{2}$ (7) 0 (8) $\frac{\pi}{6}$ (9) $\frac{\pi}{4}$ (10) $-\frac{\pi}{3}$

5D (1) §3.2で arsinh が well-defined であることに注意すると
$\sinh\left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = x$ を示せばよい。実際、

$$\sinh\left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2} = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{2} = x$$

となっている。ここで $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)} = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1}$ を用いた。

(2) (1)と同様に $\tanh\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \Big/ \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

$$= \frac{\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - 2}{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{(1+x)^2 + (1-x)^2 - 2(1+x)(1-x)}{(1+x)^2 - (1-x)^2} = \frac{4x^2}{4x} = x$$

である。ここで $-1 < x < 1$ であれば $\frac{1+x}{1-x}, \frac{1-x}{1+x} > 0$ なので上の計算に現れる各項は意味をもつことに注意しよう。

$\boxed{5E}$ (1) $\arcsin\frac{4}{5}=A$, $\arcsin\frac{3}{5}=B$ とすると $\cos A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$ である。

$(\because -\frac{\pi}{2}<A, B<\frac{\pi}{2})$

よって $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=1$

これから $A+B=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ が分かるが, $-\frac{\pi}{2}<A, B<\frac{\pi}{2}$ より

$n=0$ でなければならない。 $\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$

(2) (1)と同様に $\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{10}}+\sqrt{1-\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

これから $(\text{求める値})=\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ が分かるが,

$0<\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}, \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}<\frac{\pi}{2}$ より, $n=0$ でなければならない。$\therefore$ 求める値 $=\frac{\pi}{4}$

(3) $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$

よって $(\text{求める値})=\frac{\pi}{4}+n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$ だが, $0<\arctan\frac{1}{2}, \arctan\frac{1}{3}<\frac{\pi}{4}$

より $n=0$ でなければならない。

(4) (3)と同様に $\dfrac{(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)}{1-(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\sqrt{3}$ となるので, $(\text{求める値})=\frac{\pi}{3}+n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$

を得る。$-\pi<\arctan(\sqrt{3}-2)<0<\arctan(\sqrt{3}+2)<\pi$ より

$-\pi<(\text{求める値})<\pi$ なので, $n=0$ でなければならない。

$\boxed{5F}$ (1) $(\cot x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(2) $(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

(3) $(\csc x)'=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

(4) $(\tanh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

(5) $(\sinh x)^{2\prime} = 2\sinh x \cdot (\sinh x)'$

$= 2\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh(2x)$

(6) $\tan(\arctan x) = x$ より $1 = \dfrac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot (\arctan x)'$

よって $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より、$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ がわかった。

$\therefore\ (\arctan x)^{2\prime} = 2(\arctan x) \cdot (\arctan x)' = \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$

$\boxed{5G}$ (1) $\log|\sin x| + C$　(2) $\log(e^x + e^{-x}) + C$

(3) $u = \sin x$ とすると、$du = \cos x \cdot dx$

$\therefore\ \displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(\sin x) + C$

(4) $u = e^{-x}$ とすると $du = -e^{-x}dx$

$\therefore\ \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin(e^{-x}) + C$

(5) $u = e^x$ とすると $du = e^x dx$

$\therefore\ \displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arsinh}(e^x) + C$

(6) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(7) $\displaystyle\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

$\boxed{8A}$ (1) $\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$

$\boxed{8E}$ (1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{8F}$ (1) $\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2ab & -2b^2 \\ 2a^2 & -2ab \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{8H}$ (1)
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta-\varphi) & -\sin(\theta-\varphi) \\ \sin(\theta-\varphi) & \cos(\theta-\varphi) \end{pmatrix}$$