$\boxed{6A}$ (1) $y' = -\lambda a \sin(ax+b) + \mu a \cos(ax+b)$

$$y'' = -\lambda a^2 \cos(ax+b) - \mu a^2 \sin(ax+b) = -a^2(\lambda \cos(ax+b) + \mu \sin(ax+b))$$
$$= -a^2 y$$

(2) $y' = \dfrac{a}{ax+b} = a e^{-\log(ax+b)} = a e^{-y}$

(3) $y' = \dfrac{a}{\cos^2(ax+b)} = a(1+\tan^2(ax+b))$

$$y'' = 2a \tan(ax+b) \frac{a}{\cos^2(ax+b)} = 2ayy'$$

(4) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'' = -\dfrac{1}{2} \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1-x^2)} = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$$(1-x^2) y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = xy'$$

(5) $y' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ より

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1-3x}{(1-x)^2} - \frac{1-x}{(1-x)^2} = 0$$

$\boxed{6B}$ (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int 2x\,dx$ より $\operatorname{arsinh} y = x^2 + C$

$\therefore y = \sinh(x^2 + C)$ (Cは定数)

(2) $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$ より $\arctan y = x + C$ $\therefore y = \tan(x+C)$ (〃)

(3) $\displaystyle\int e^y dy = \int e^x dx$ より $e^y = e^x + C$ $\therefore y = \log(e^x + C)$ (〃)

(4) $\displaystyle\int \cosh y\, dy = \int dx$ より $\sinh y = x + C$ $\therefore y = \operatorname{arsinh}(x+C)$ (〃)

$\boxed{6C}$ (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y-a} = \int k\,dx$ より $\log|y-a| = kx+C$

$\therefore y = \pm e^{C}e^{kx}+a \qquad \therefore y = De^{kx}+a$ (Dは定数)

(2) $\displaystyle\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)} = \int k\,dx$ より $\displaystyle\log\left|\frac{y-a}{y-b}\right| = (a-b)(kx+C)$

$\displaystyle = \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{y-a}-\frac{1}{y-b}\right)dy$

$\displaystyle\therefore \frac{y-a}{y-b} = \pm e^{(a-b)C}e^{k(a-b)x}$

つまり $y-a = De^{k(a-b)x}y - bDe^{k(a-b)x}$ ($D=\pm e^{(a-b)C}$とおいた)

$\displaystyle\therefore y = \frac{bDe^{k(a-b)x}-a}{De^{k(a-b)x}-1} = \frac{bDe^{kax}-ae^{kbx}}{De^{kax}-e^{kbx}}$ および $y=a,b$

(注 $D=0,\infty$にそれぞれ対応)

(3) $\displaystyle\int\frac{dy}{(y-a)^2} = \int k\,dx$ より $\displaystyle -\frac{1}{y-a} = kx+C \quad \therefore y = a-\frac{1}{kx+C}$ および $y=a$

(4) $\displaystyle\int\frac{dy}{(y-a)^3} = \int k\,dx$ より $\displaystyle -\frac{1}{2(y-a)^2} = kx+C \quad \therefore y = a\pm\frac{1}{\sqrt{D-2kx}}$ および $y=a$

(注 $D=-2C$は定数)

$\boxed{6D}$ (1) $\int y\,dy = \int x\,dx$ より $\displaystyle\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2}+C \quad \therefore y = \pm\sqrt{x^2+2C}$

条件より $y=\sqrt{x^2+1}$

(2) $\int y\,dy = +\int -x\,dx$ より $\displaystyle\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2}+C \quad \therefore y = \pm\sqrt{2C-x^2}$

条件より $y=\sqrt{1-x^2}$

(3) $\int 2y\,dy = \int dx$ より $y^2 = x+C \quad \therefore y = \pm\sqrt{x+C}$

条件より $y=\sqrt{x+1}$

(4) $\displaystyle\int\frac{dy}{1+y^2} = \int dx$ より $\arctan y = x+C \quad \therefore y=\tan(x+C)$。条件より $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{6E}$ (1) $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$ より $\log|y| = \frac{x^2}{2} + C$

$\therefore y = \pm e^C e^{\frac{x^2}{2}}$ よって $y = De^{\frac{x^2}{2}}$ (Dは定数)

(2) $\int \frac{dy}{y} = \int \sin x\,dx$ より $\log|y| = -\cos x + C$

$\therefore y = \pm e^C e^{-\cos x}$ よって $y = De^{-\cos x}$ (Dは定数)

(3) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$ より $\log|y| = \log(1+x^2) + C$

$\therefore y = \pm e^C e^{\log(1+x^2)} = \pm e^C \cdot (1+x^2)$ よって $y = D(1+x^2)$ (Dは定数)

(4) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ より $\log|y| = \log(e^x+1)$

(3)と同様に $y = D(e^x+1)$ (Dは定数)

(5) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\cosh x}$ より $\log|y| = \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}dx = 2\arctan(e^x) + C$

よって $y = D\exp(2\arctan x)$ (Dは定数)

$\boxed{6F}$ なる : (1), (4), (5)

ならない : (2), (3)

例えば(4)を示すと : $y_1' = x^2 y_1$, $y_2' = x^2 y_2$ のとき、$y = \lambda y_1 + \mu y_2$ について

$$y' = \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda x^2 y_1 + \mu x^2 y_2 = x^2(\lambda y_1 + \mu y_2) = x^2 y$$

例えば(2)の例 : $y = -1$ は(2)の解だが、$2y$は(2)の解ではない。

$\boxed{\text{訂正}}$ レポート問題 6

$n \geqq 1$ について $\lim_{x \to 0} x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\lim_{x \to 0} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ は使ってよいです。

5/23 の演習は4限に行います。

$\boxed{12A}$ (1) 2×3 (2) 3 (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{12B}$ (1) $(x+y)$ (2) $\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} x+y+2z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$

$\boxed{12C}$ (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$

$\boxed{12D}$ (1) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{12E}$ (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

(5) $(2\ 3)$ (6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

12F (1)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E_2$$ より $A^3=-A$, $A^4=E_2$ である。

よって

$$A^n=\begin{cases}E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 0 \pmod 4\\ A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 1 \pmod 4\\ -E_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 2 \pmod 4\\ -A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

(2)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\underset{\underset{E_3}{\shortparallel}}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

よって

$$A^n=\begin{cases}E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 0 \pmod 3\\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 1 \pmod 3\\ A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

(3)

$$A^2=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-3\\-3&6&-3\\-3&-3&6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=3A$$

よって $A^n=3^{n-1}A=3^{n-1}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\left(=\begin{pmatrix}2\cdot3^{n-1}&-3^{n-1}&-3^{n-1}\\-3^{n-1}&2\cdot3^{n-1}&-3^{n-1}\\-3^{n-1}&-3^{n-1}&2\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}\right)$ if $n\geq 1$

注 $A^0=E_3$

(4)

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4E_4 \text{ より}$$

$$A^n=\begin{cases}4^{\frac{n}{2}}E_4=2^nE_4 & \text{if } n\equiv 0 \pmod 2\\ 4^{\frac{n-1}{2}}A=2^{n-1}A & \text{if } n\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$$

$\boxed{12G}$ Aを$n\times n$の正方行列とする。

Aの第j列をa_jとすると、$A=(a_1,\cdots,a_n)$となっている（a_jはn次元列ベクトルである）。

$$A^2=A(a_1,\cdots,a_n)=(Aa_1,\cdots,Aa_n)$$

$\lambda A=(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)$ より $\forall j=1,\cdots,n$, $Aa_j=\lambda a_j$ である。

今、$A\neq O$ より $\exists i=1,\cdots,n$. $a_i\neq 0$ なので、求めるvとして このa_iを取ればよい。