$\boxed{8B}$ (1) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ なので，x軸への射影

(2) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$ より，y軸に関する折り返し

(3) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ より，2倍拡大

(4) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ より，原点に関する点対称変換

(5) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}\\\frac{x+y}{2}\end{pmatrix}$ より，直線$y=x$に下した垂線の足（注 8D(4)も参照）

$\boxed{8C}$ (1) もつ　(2) もたない　(3) もつ　(4) もたない

(5) もつ　(6) もたない　(7) もたない　(8) もつ

注 もつものについては $F(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda F(\vec{x})+\mu F(\vec{y})$ を確かめればよい。(＊)

例えば，(8)では $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ とすると

$$F(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=F\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu y_1\\\lambda x_2+\mu y_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_2+\mu y_2)\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda(x_1+x_2)+\mu(y_1+y_2)\\0\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\begin{pmatrix}x_1+x_2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1+y_2\\0\end{pmatrix}=\lambda F(\vec{x})+\mu F(\vec{y})$$ である。

注 もたないものについては，(＊)が成立しないような$\lambda,\mu,\vec{x},\vec{y}$の例を1つ挙げればよい。

例えば，(7)で $\vec{x}=\vec{y}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\lambda=\mu=1$ とすると (＊)の左辺 $=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

(＊)の右辺 $=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ となる。

$\boxed{8D}$ (1) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$ なる変換であるから，$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ なる変換であるから $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

8G (1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

注 原点を中心とする θ 回転変換は $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ であらわされる。

(∵ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{matrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta\\\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta\end{matrix}$)

13A (1) $\det=1$。故に正則であり, $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

(2) $\det=0$。よって正則ではない。

(3) $\det=-1$。よって正則であり, $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

(4) $\det=\sqrt{12}-2\sqrt{3}=0$。よって正則ではない。

(5) $\det=\sqrt{18}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$。よって正則であり, $\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{2}\\2&\sqrt{6}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{6}&-\sqrt{2}\\-2&\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\-\sqrt{2}&\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}$

13B (1) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2.5\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\5&-8\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&5\\-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\boxed{13C}$ (1) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ より，これは原点に関する点対称変換である。

よってこれは逆変換をもち，それは自分自身なので，その表現行列は $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

(2) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ より，これは直線 $y=x$ に関する折り返しである。(1)と同様に $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

(3) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y\end{pmatrix}$ より，これは「yだけx座標を原点に"よせた"変換」である。

よってこれの逆変換は，「yだけx座標を原点から押し出した変換」であるから $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

(4) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix}$。これは明らかに単射でないから，逆をもたない。

（注 図形的には「直線 $y=x$ に下した垂線の足の2倍」である）

(5) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$。これは「45°回転の$\sqrt{2}$倍拡大」だから，逆変換をもち，

それの表現行列は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos(-45°)&-\sin(-45°)\\\sin(-45°)&\cos(-45°)\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$\boxed{13D}$ 問題の線型変換Fを表す行列をAとする。

(1) $A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ $\therefore A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

(2) $A\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\therefore A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

(3) $A\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ $\therefore A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$

(4) $A\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$ $\therefore A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-4\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$

$\boxed{13E}$ (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$ より z軸に関する折返し （または、z軸に関する 180° 回転）

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ より、z軸に関する 90° 回転

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ より、平面 $y=x$ に関する点対称変換（注 $\boxed{13F}$ (3) も参照）

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $e_1 \mapsto e_2,\ e_2 \mapsto e_3,\ e_3 \mapsto e_1$ より、直線 $x=y=z$ についての 120° 回転

（ここで $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底）

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{13F}$ (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{10F}$ (1) 原点で最小にも極小にもならない。

∵ $x=y=\varepsilon$ とすると $x+y=2\varepsilon$ だが、これは $\varepsilon\to+0$ なら $x+y\to+0$

$\varepsilon\to-0$ なら $x+y\to-0$ となる。

(2) $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ (x+y)^2\geq 0$ より原点で最小になる。

しかし $\forall\varepsilon>0$ について $x=\varepsilon,\ y=-\varepsilon$ とすると $(x+y)^2=0$ となるので極小とはならない。

(3) 原点で最小にも極小にもならない。

∵ $y=0,\ x=\varepsilon$ とすると、$x^3+y^2=\varepsilon^3$ となり、(1)と同じ理由による。

(4) $\forall x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ x^4+2y^2\geqq 0$ (等号成立は $x=y=0$) なので、原点で極小かつ最小。

(5) 原点で最小にも極小にもならない。

∵ $y=kx^2$ とする。$x^4-3x^2y+2y^2=(1-3k+2k^2)x^4$ となるが、$k=\pm0.1$ のとき

$1-3k+2k^2$ の符号は $\mp$ となる。よって $x=\varepsilon,\ y=0.1\varepsilon$ として $\varepsilon\to0$ とすると

$x^4-3x^2y+2y^2$ は負の値をとりながら 0 に近づくし、

$x=\varepsilon,\ y=-0.1\varepsilon$ として $\varepsilon\to0$ とすると、$x^4-3x^2y+2y^2$ は正の値をとりながら

0 に近づく。

$\boxed{10D}$ (1) $2x^2+xy-y^2=2\left(x+\frac{y}{4}\right)^2-\frac{9y^2}{8}$ より $x=\varepsilon,\ y=-4\varepsilon$ として $\varepsilon\to0$

とすることで、原点で最小でも極小でもないことが分かる。

(2) $2x^2+3xy+y^2=2\left(x+\frac{3y}{4}\right)^2-\frac{y^2}{8}$ より (1)と同じ理由により、

原点で最小でも極小でもないことが分かる。

(3) $2x^2-3xy+2y^2=2\left(x-\frac{3y}{4}\right)^2+\frac{7y^2}{8}\geqq0$ 等号成立は $x=y=0$

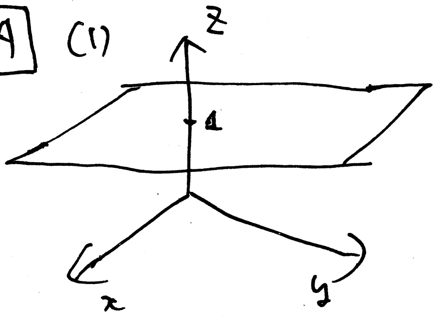
より、原点で極小かつ最小である。

(4) $4x^2-4xy+y^2=(2x-y)^2\geq 0$ なので、原点で最小である。
しかし、$\forall\varepsilon>0$ について、$x=\varepsilon$、$y=2\varepsilon$ とすると $4x^2-4xy+y^2=0$ となるので
原点で極小にはならない。

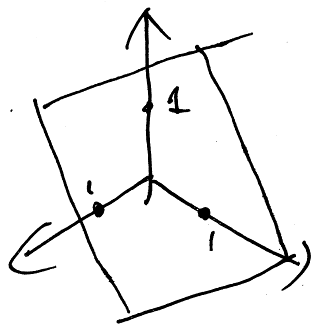
$\boxed{10C}$ (1) t^2 (2) $t^2\cos\theta_0\sin\theta_0$ (3) $t^2(1+3\cos\theta_0\sin\theta_0)$

(4) $\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0 = \cos 2\theta_0$ (5) $t(\cos^3\theta_0-3\cos\theta_0\sin^2\theta_0)=t\cos(3\theta_0)$

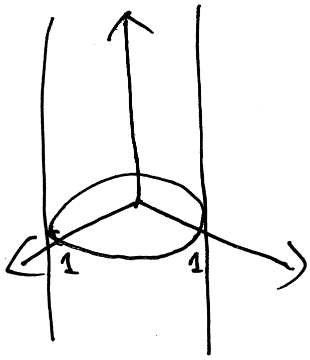
$\boxed{10A}$ (1)



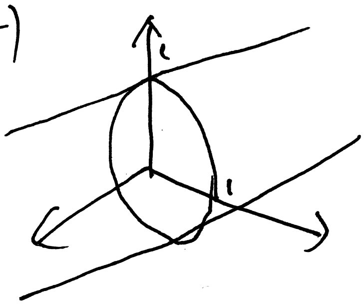
(2)



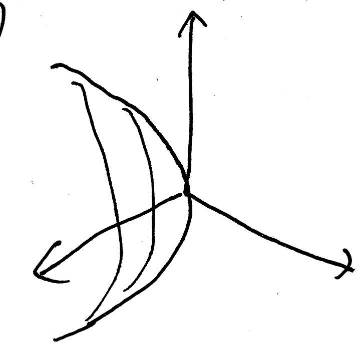
(3)



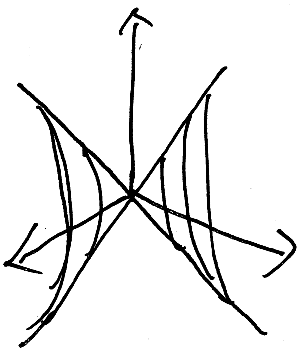
(4)



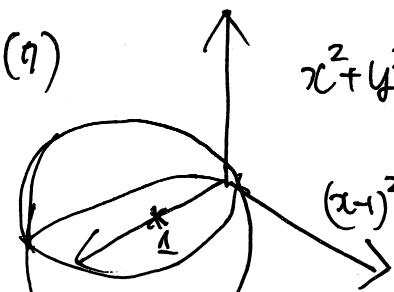
(5)



(6)



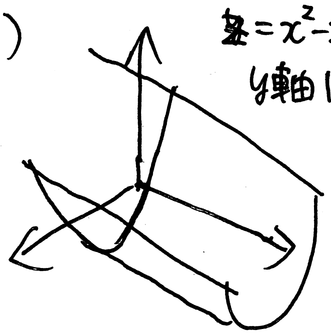
(7)



$x^2+y^2+z^2=2x$
$\Updownarrow$
$(x-1)^2+y^2+z^2=1$

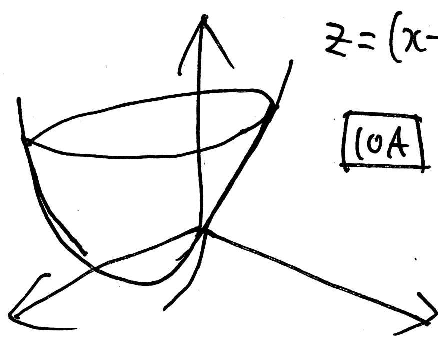
$(1,0,0)$ 中心の半径 1 の球

$\boxed{10B}$ (1)



$z=x^2-2x$ を
y 軸に動かしたもの

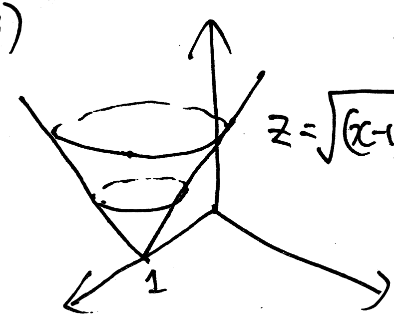
(2)



$z=(x-1)^2+y^2-1$

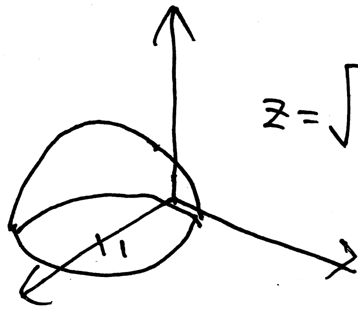
$\boxed{10A}$ (5)をずらしたもの

(3)



$z=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

(4)



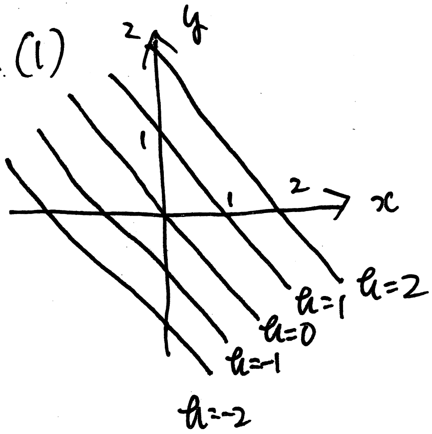
$z=\sqrt{1-(x-1)^2-y^2}$

$z=z_0$で切ると

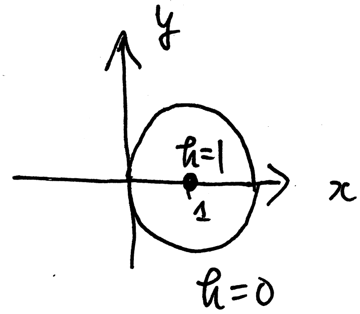
中心が$(1,0)$

半径$\sqrt{1-z_0^2}$の円になっている。

$\boxed{10E}$ (1)



(2) $h=\sqrt{2x-x^2-y^2}=\sqrt{1-(x-1)^2-y^2}$

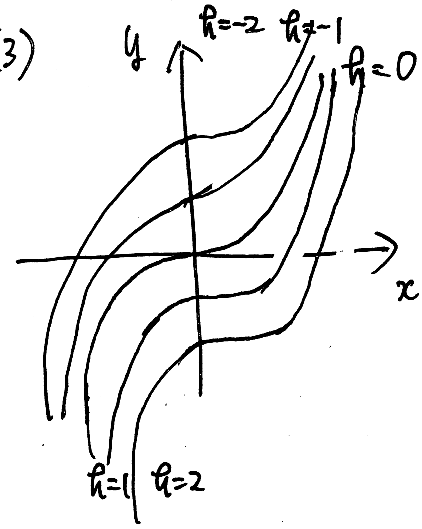


・$h=\pm2,-1$のとき

等高線はϕ

(10B (4) も参考に)

(3)



$y=x^3-h$

(4)