$\boxed{\text{A1}}$ 2×2の可逆行列 P で

$P^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ となるものが存在したとする。

両辺を2乗すると $P^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2P=\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{pmatrix}$ となるが、$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ より

$\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ つまり $\lambda_1=\lambda_2=0$ が得られる。

すると $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ となって矛盾が生じた。

$\boxed{\text{A2}}$ (a) 固有多項式は $\begin{vmatrix}t-1&-2\\1&t-4\end{vmatrix}=(t-1)(t-4)+2=t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$

なので、$\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$ の固有値は、これの解の $t=2,3$ である。

(b) 固有多項式は $\begin{vmatrix}t-6&3&7\\1&t-2&-1\\-5&3&t+6\end{vmatrix}=(t-6)(t+6)(t-2)+15+21+35(t-2)+3(t-6)-3(t+6)$

$=(t^2-36)(t-2)+35t-70$

$=t^3-2t^2-t+2=(t-2)(t^2-1)$

なので固有値は $t=2,\pm1$

(c) 固有多項式は $\begin{vmatrix}t-2&1&-1\\0&t-1&-1\\1&-1&t-1\end{vmatrix}=(t-2)(t-1)^2-1+(t-1)-(t-2)$

$=(t-2)(t-1)^2$ より固有値は $t=2,\cancel{\pm}1$

$\boxed{\text{A3}}$ (a) ・$t=2$ のとき $\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を解くと $\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\1&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)-(1行)}\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\0&0&0\end{array}\right)$

より $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ よって固有値2の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

・$t=3$ のとき $\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を解くと $\left(\begin{array}{cc|c}2&-2&0\\1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)\leftrightarrow(1行)}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\2&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)-(1行)\times2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)$

より $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ よって固有値3の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

(b) ・$t=2$ のとき $\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-4&3&7&0\\1&0&-1&0\\-5&3&8&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\-4&3&7&0\\-5&3&8&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)-(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\-4&3&7&0\\-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[(3行)+(1行)]{(2行)+(1行)\cdot4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ よって固有値2の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

・$t=1$ のとき $\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-5&3&7&0\\1&-1&-1&0\\-5&3&7&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)-(1行)}\left(\begin{array}{ccc|c}-5&3&7&0\\1&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\-5&3&7&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2行)+(1行)\times5}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&-2&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ よって固有値1の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

・$t=-1$ のとき $\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-7&3&7&0\\1&-3&-1&0\\-5&3&5&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)\ (2行)\ (1行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-1&0\\-5&3&5&0\\-7&3&7&0\end{array}\right)\xrightarrow[(3行)+(1行)\cdot7]{(2行)+(1行)\cdot5}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-1&0\\0&-12&0&0\\0&-18&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)-(2行)\cdot\frac{3}{2}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-1&0\\0&-12&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ よって固有値−1の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq0$)

(c) <u>$t=2$ のとき</u> $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\1&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1行)-(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\1&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)\leftrightarrow(1行)}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ よって 固有値2の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq 0$)

<u>$t=1$ のとき</u> $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\0&0&-1&0\\1&-1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)+(1行)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(3行)-(2行)}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ よって 固有値1の固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (ただし $s\neq 0$)

$\boxed{A4}$ (a) 固有値2の固有空間は $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ を基底にもち、1次元

〃 3 〃 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 〃 1 〃

合計が $\dim \mathbb{C}^2=2$ と等しいので、$\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$ は 対角化可能である

(b) 固有値2の固有空間は $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ を基底にもち、1次元

〃 1 〃 $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ 〃 1 〃

〃 -1 〃 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 〃 1 〃

合計が $\dim \mathbb{C}^3=3$ と等しいので、$\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\ \text{[illegible]}\end{pmatrix}$ は対角化可能である。

(c) 固有値1の固有空間は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ を基底にもち、1次元で

これは 固有多項式の解 $t=1$ の重複度2より真に小さい。

よって $\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ は対角化不可能である。

$\boxed{A5}$ (a) $P=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ (b) $P=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$\boxed{A6}$ (a) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$ (b) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$