X1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

○ が pivot である。

pivot は 1行目〜2行目に存在し、

- 「だんだん右に」分布しており
- 各 pivot の 左 および 下は 0 になっている。（実線部）

又、pivot が存在しない 3行目（以降）は 0 なので、$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 0&0&1&-2 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ は階段行列であることが分かった。

X2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3行)-(1行)\times 3]{(2行)-(1行)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & -4 & 4 \\ 0 & 6 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3行)-(2行)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

この変形は ○ が pivot になるように

この変形は □ が pivot になるように

○, □, △ は pivot になっているので、$\begin{pmatrix} 1&-2&3&-1 \\ 2&-1&2&2 \\ 3&0&2&3 \end{pmatrix}$ に行基本変形を適用することで、階段行列 $\begin{pmatrix} 1&-2&3&1 \\ 0&3&-4&4 \\ 0&0&1&-2 \end{pmatrix}$ が得られた。

X3

まず $-7z+7w=0$ より $z=w$

次に $-y-z+2w=0$ より $y=-z+2w=w$

最後に $3x-5y+3z+w=0$ より $x=\frac{1}{3}(5y-3z-w)=\frac{w}{3}$

以上をまとめると 解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$ （t はパラメータ）

X4

拡大係数行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$ に行基本変形を適用し、階段行列にする。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)\leftrightarrow(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)-(1行)\times 3]{(2行)-(1行)\times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{-7} & 7 & -7 \\ 0 & -4 & 8 & -7 \end{array}\right)$$

（意図：① を pivot にした方が計算が楽そうだから）

（意図：① が pivot になるように）

$$\xrightarrow{(2行)\times(-\frac{1}{7})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)+(2行)\times 4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

（意図：$\boxed{-7}$ を $\boxed{1}$ にした方が計算が楽そうだから）

（意図：$\boxed{1}$ も pivot になるように）

○, □, △ は pivot だから、階段行列が得られた。

まず $4z=-3$ より $z=-\frac{3}{4}$

次に $y-z=1$ より $y=z+1=\frac{1}{4}$

最後に $x+2y-3z=4$ より $x=-2y+3z+4=\frac{5}{4}$

$\therefore (x, y, z) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

X5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \\ 3 & 7 & -6 & k \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)-(1行)\times 3]{(2行)-(1行)\times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & k-6 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)+(2行)\times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k-8 \end{array}\right)$$

（○ が pivot）

最右辺が解が存在する連立方程式である条件は $k=8$ であり、

$y=-1$, $x+3y-2z=2$ より $x=5+2z$ が得られる。

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （t はパラメータ） が $k=8$ における解である。