C1

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\widetilde{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} ei-fh & -(bi-ch) & bf-ce \\ -(di-fg) & ai-cg & -(af-cd) \\ dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{pmatrix}$$

C2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ とすると，$\det A = 3(\omega^2 - \omega)$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \omega^2-\omega & \omega^2-\omega & \omega^2-\omega \\ \omega^2-\omega & \omega-1 & 1-\omega^2 \\ \omega^2-\omega & 1-\omega^2 & \omega-1 \end{pmatrix}$$

なので，$A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{\det A} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$ （ここで $\omega^3 = 1$ は注意なく用いた）

C3

$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ について $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$

と行列式は定義される。ここで $\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \{\pm 1\}$ は

置換 $\sigma \in S_n$ の符号数である。

Aの余因子行列 $\widetilde{A}$ は $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{a}_{2n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$ と定義される。

ここで $\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det$（Aから$i$行と$j$列を除いて得られる$(n-1)\times(n-1)$行列）

は Aの(i,j)余因子である。

C4

σの転倒数は6，τの転倒数は15なので

$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^6 = 1$，$\operatorname{sgn}\tau = (-1)^{15} = -1$

よって $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau = -1$

$\operatorname{sgn}(\tau\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}\sigma = 1$

C5

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3行)-(1行)\cdot 4 \\ (4行)-(1行)\cdot 2}]{(2行)-(1行)\cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -15 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

より

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ -3 & -2 & -15 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 20 + 30 - 24 + 15 = 41$$

(b)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ （第1行で余因子展開）

$$= -2 - (-1) = -1$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{pmatrix} \xrightarrow{(4列)+(2,3列)} \begin{pmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{pmatrix}$$

より

多重線型性

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{pmatrix} = (a+b+c+d)\det\begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

交代性

~~(d)~~

(d)

(第1行で余因子展開)

$$\det\begin{pmatrix}0&a&b&c\\-a&0&d&e\\-b&-d&0&f\\-c&-e&-f&0\end{pmatrix} = -a\det\begin{pmatrix}-a&d&e\\-b&0&f\\-c&-f&0\end{pmatrix} + b\det\begin{pmatrix}-a&0&e\\-b&-d&f\\-c&-e&0\end{pmatrix} - c\det\begin{pmatrix}-a&0&d\\-b&-d&0\\-c&-e&-f\end{pmatrix}$$

$$= -a(-cdf+bef-af^2) + b(+be^2-cde-aef) - c(-adf+bde-cd^2)$$

$$= (acdf-abef+a^2f^2) + (b^2e^2-bcde-abef) + (acdf-bcde+c^2d^2)$$

$$= a^2f^2+b^2e^2+c^2d^2+2acdf-2bcde-2abef$$

$$= (af-be+cd)^2$$

C6 与えられた連立方程式は、$\vec{b} = x_1\vec{a_1}+\cdots+x_n\vec{a_n}$ と書き直せる。

$$\det(\vec{b},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}) \underset{\text{多重線型性}}{=} x_1\det(\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}) + x_2\det(\vec{a_2},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}) + \cdots + x_n\det(\vec{a_n},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n})$$

$$\underset{\text{交代性}}{=} x_1\det(\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n})$$

よって、$\det(\vec{a_1},\cdots,\vec{a_n})\neq 0$ ならば $x_1 = \dfrac{\det(\vec{b},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n})}{\det(\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n})}$ である。

C7 クラメルの公式より $x = \begin{vmatrix}9&-1&2&1\\6&1&-1&3\\2&3&2&-2\\-3&0&1&4\end{vmatrix}/\Delta$, $y = \begin{vmatrix}1&9&2&1\\2&6&-1&3\\1&2&2&-2\\-3&-3&1&4\end{vmatrix}/\Delta$

$z = \begin{vmatrix}1&-1&9&1\\2&1&6&3\\1&3&2&-2\\-3&0&-3&4\end{vmatrix}/\Delta$, $w = \begin{vmatrix}1&-1&2&9\\2&1&-1&6\\1&3&2&2\\-3&0&1&-3\end{vmatrix}/\Delta$, $\Delta = \begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&3\\1&3&2&-2\\-3&0&1&4\end{vmatrix}$ である。(もし$\Delta\neq 0$なら)

必要な行列式を計算すると、$x = \dfrac{558}{186} = 3$, $y = \dfrac{-186}{186} = -1$

$z = \dfrac{372}{186} = 2$, $w = \dfrac{186}{186} = 1$ となる。

C8 $n\times n$ 行列 B で「$AB = E_n = BA$ かつ Bの成分は全て整数」となるものが存在するとき、$\det A\cdot\det B = \det E_n = 1$ かつ $\det A, \det B\in\mathbb{Z}$ より $\det A = \pm 1$ でなければならない。

逆に、$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$ だが(もし $\det A\neq 0$ なら)、Aの成分が全て整数なら $\tilde{A}$の成分も全て整数なので、$\det A = \pm 1$ のとき A^{-1}の成分は全て整数となる。