東工大 [1] 与えられた行列をAとする。

固有多項式を求める

$$\det(\lambda E_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \lambda-(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\beta \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-\beta)(\lambda-(\alpha+\beta))$$

これが重解をもたないとき、対角化可能である。条件は $\beta \neq 0,\ \alpha \neq 0,\ \alpha+\beta \neq 0$

<u>3重解をもつとき</u> $\alpha=\beta=0$ このとき $A=O$ なので既に対角化されている。

<u>2重解をもつとき①</u> $\beta=0,\ \alpha\neq 0$ このとき $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で対角化されている。

<u>2重解をもつとき②</u> $\alpha=-\beta\neq 0$ このとき $A\boldsymbol{v}=-\alpha\boldsymbol{v}$ を調べると（②より このとき 固有値は $\lambda=0,\beta$）

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\alpha & -\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より $\boldsymbol{v}$は $3-\underbrace{2}_{\text{pivotの数}}=1$ コのパラメータであらわされる。

この数が $\lambda=\beta$ の重複度2より小さいため、Aは対角化不可能

<u>重解をもたないとき</u> $A\boldsymbol{v}=0$ を解くと $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t$

$A\boldsymbol{v}=\beta\boldsymbol{v}$ を解くと $\left(\begin{array}{ccc|c} \beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)+(2行)\cdot\beta} \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$

$A\boldsymbol{v}=(\alpha+\beta)\boldsymbol{v}$ を解くと $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\beta/\alpha+\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$

以上をまとめると

注）見直していて「二重解として、$\alpha=0, \beta\neq 0$ の場合」がぬけていました。合わせると☆は正しくは「$\alpha\beta=0, \alpha+\beta\neq 0$」となりますが A が対角化可能となる条件と A を対角行列にする P である。

- $\beta\neq 0, \alpha\neq 0, \alpha+\beta\neq 0$ のとき $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\beta=0$ のとき $P=E_3$ ― ☆

東大（平成2）5

(1) $x_{n+1}=0.6x_n+0.2y_n$
$y_{n+1}=0.4x_n+0.8y_n$ より $T=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$

(2) 固有多項式は $|\lambda E_2-T|=\begin{vmatrix} \lambda-0.6 & -0.2 \\ -0.4 & \lambda-0.8 \end{vmatrix}=\lambda^2-1.4\lambda+0.4$
$=(\lambda-0.4)(\lambda-1)$

$Av=v$ を解くと $\left(\begin{array}{cc|c} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t$

$Av=0.4v$ を解くと $\left(\begin{array}{cc|c} -0.2 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 0 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}t$

まとめると $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 2c_{11} & -c_{12} \end{pmatrix}$

(3) $c_{11}=c_{12}=1$ について $C^{-1}TC=A$ ∴ $T^n=CA^nC^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

よって $\lim_{n\to\infty}T^n=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

∴ $\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s/3 \\ 2s/3 \end{pmatrix}$ ここで $s=x_0+y_0$ は全人口である。

(4) (3) より $1:2$

京大（平成28年度）

$\boxed{2}$ (i) 固有多項式を求める

$$\det(\lambda E_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-a) + 4(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2 - a\lambda + 4)$$

よって固有値は $\lambda = 1,\ \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-16}}{2}$

(ii) 固有多項式が重解をもたなければ対角化可能である。

その条件は $a \neq 4$ かつ $1 - a + 4 \neq 0$ i.e. $a \neq 5$

<u>$a=4$のとき</u> 固有値は $\lambda = 1, 2$ （注 $a=-4$のときの考察が抜けていて、この場合も同様に対角化不可能になることが確認できます）

$Av = 2v$ を調べる。
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)+(1行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)+(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より v はパラメータ1つであらわされ、これは $\lambda=2$ の固有多項式における重複度2より小さい。よって A は対角化可能ではない。

<u>$a=5$のとき</u> 固有値は $\lambda = 1, 4$

$Av = v$ を調べる。
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3行)+\frac{(1行)}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)\leftrightarrow(3行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より v はパラメータ1つであらわされ、これは $\lambda=1$ の固有多項式における重複度2より小さい。よって A は対角化可能ではない。

まとめると、$a \neq 4, 5$ が A が対角化可能になる条件である。

名古屋 2003 $\boxed{1}$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in V$ より $(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$ でなければならない。

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & p+1 & 3 & q & 0\\ 1 & 2 & 2p+1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -p & 4 & 4q & 0\\ 0 & 1 & -p^2 & -1 & -2q & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3行-1行]{2行-1行} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & p+1 & 3 & q & 0\\ 0 & 1 & p & -1 & -q & 0\\ 0 & -1 & -2p-1 & 1 & 3q & 0\\ 0 & 1 & -p^2 & -1 & -2q & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{4行-2行\\1行-2行}]{3行+2行} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 2q & 0\\ 0 & 1 & p & -1 & -q & 0\\ 0 & 0 & -p-1 & 0 & 2q & 0\\ 0 & 0 & -p(p+1) & 0 & -q & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4行-p\cdot 3行} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 2q & 0\\ 0 & 1 & p & -1 & -q & 0\\ 0 & 0 & -p-1 & 0 & 2q & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q(2p+1) & 0 \end{array}\right)$$

忘れて下さい。

~~$|V| \neq \phi$ より $q(2p+1)=0$~~

$q(2p+1)\neq 0$ のとき
Vの元は $5-3=2$ コの元のパラメータで表され，題意をみたさない。

$q=0$ のとき　$p=-1$ のときに限って V は 3つのパラメータで表される。

このとき $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}s + \begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u$ であり 〰 が求める基底である。

$p=-\frac{1}{2}$ のとき　このとき $-p-1\neq 0$ より $\dim V = 5-\underbrace{3}_{\text{pivotの数}} = 2$ となり題意をみたさない。