(B1)

(a) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&8\\4&6&8\\3&4&7\end{pmatrix} \xrightarrow[(3列)-(1列)]{(2列)-(1列)2} \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&6\\4&-2&4\\3&-2&4\end{pmatrix} \xrightarrow{(3列)+(2列)\cdot 2} \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\4&-2&0\\3&-2&0\end{pmatrix}$ より $\mathrm{rank}\, A = 2$

よって $\dim \mathrm{Im}\, F_A = 2 < 4$ なので全射ではない

$\dim \mathrm{Ker}\, F_A = 3-2 = 1 \neq 0$ なので単射ではない。

(b) $\begin{pmatrix}1&4&6&5\\2&7&9&7\\3&8&5&2\end{pmatrix} \xrightarrow[(3行)-(1行)3]{(2行)-(1行)2} \begin{pmatrix}1&4&6&5\\0&-1&-3&-3\\0&-4&-13&-13\end{pmatrix} \xrightarrow{(3行)-(2行)4} \begin{pmatrix}1&4&6&5\\0&-1&-3&-3\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ より $\mathrm{rank}\, A = 3$

よって $\dim \mathrm{Im}\, F_A = 3 = 3$ なので全射

$\dim \ker F_A = 4-3 = 1 \neq 0$ なので単射ではない

(c) $\det\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} = 2 \neq 0 \ (\mathrm{in}\ \mathbb{R})$ より 全単射

(B4) 1. $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i) = 0}} \Rightarrow \forall i,\ c_i = 0$ を示す。

$g = f^{-1}$ とすると $g(0) = g\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i)\right) \underset{g\text{の線型性}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i g(f(v_i)) \underset{g=f^{-1}\text{より}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$

又、一般に線型写像 $h: W_1 \to W_2$ について $h(0_{W_1}) = 0_{W_2}$ もやさしいので

$=$ のとき $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$。今 v_i たちは線型独立だったから $\forall i,\ c_i = 0$ である。

2. $\forall w \in W\ \exists \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ s.t. $w = \sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i)$ を言えばよい。

$g = f^{-1}$ とすると、 $g(w) = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i$ となる $\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ が存在する。

今 $\underbrace{f(g(w))}_{\overset{g=f^{-1}\text{より}}{=}\, w} \underset{f\text{の線型性より}}{=} \sum_{i=1}^{n} d_i f(v_i)$ なので $c_i = d_i$ とすればよい。

(B6) 1. ϕ は元をもたないので、「$\exists 0 \in \phi \cdots$」という公理は成り立たない。
よってなりえない

2、なりえる

実際、$* + * = *$
$\lambda * = * \ (\lambda \in \mathbb{R})$ と加法とスカラー倍を定義すると、

線型空間の公理をみたしていることが確認できる。

3. なりえない

X が線型空間になったとして、$*_1 = 0$ とする。

X は2元からなるので $\exists \lambda \neq \exists \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda *_2 = \mu *_2$ だが、$\nu = (\lambda - \mu)^{-1}$ とすると
(よって $(\lambda-\mu)*_2 = 0$)

$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\nu \cdot 0} = \nu(\lambda-\mu)*_2 = 1 *_2 = *_2$ となって $*_1 \neq *_2$ に反する。

$\leftarrow$ 注 一般に線型空間 V について $\forall \lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda 0_V = 0_V$ を示すことができます。

(B5) 1、$d=2$ である。

$a_0 = 1, a_1 = 0, \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (\forall n \geq 0)$ で $(a_n)_n \in V$ を
$b_0 = 0, b_1 = 1, \ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \ (\forall n \geq 0)$ で $(b_n)_n \in V$ を 定義すると、

この2つの元が V の基底になっていることは明らかである。

(実際 $\forall (f_n)_n \in V$ について $(f_n)_n = f_0(a_n)_n + f_1(b_n)_n$ なので、この2元は V を生成し、
$c(a_n)_n + d(b_n)_n = (0)_n$ であれば、最初の2項をくらべることで $c=d=0$ がわかる)

2、$\mathbb{R}^2 \longrightarrow V$ が線型同型の一例である。
$e_1 \longmapsto (a_n)_n$
$e_2 \longmapsto (b_n)_n$

(B6) 4 なりえない $\boxed{\text{適当なスカラー倍}\cdot : \mathbb{R} \times W \to W \text{によって}}$

実際、$W = \mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ 線型空間になったとすると $x := \underset{\in \mathbb{R}}{\frac{1}{2}} \cdot \underset{\in W}{1} \in W$ だが

$x + x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1$ だが このような $x \in W$ は存在しない。

B3 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&0\\ 5&6&7&8&0\\ 9&10&11&12&0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)-(1行)9]{(2行)-(1行)5} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&0\\ 0&-4&-8&-12&0\\ 0&-8&-16&-24&0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2行)/(-4)]{(3行)-(2行)\cdot 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&0\\ 0&1&2&3&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)-(2行)\cdot 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&-1&-2&0\\ 0&1&2&3&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$

よって $\ker f$ の基底として $\begin{pmatrix}+1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる。

定義より $\mathrm{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} \right\rangle$ だが、上の計算より $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix} = 2$ なので

$\dim \mathrm{Im} f = 2$ なので、例えば1次独立な $\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im} f$ の基底としてとれる。

(c) 線形写像と行列の対応より $g = F_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 　$B = (a, b, c)$ の形をしている。

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto ax + by + cz$

$F_B\left(\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}\right) = F_B\left(\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}\right) = 0$ を解くと、$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} t \quad (t \in \mathbb{R})$

$t \neq 0$ なら $\ker \dim F_B = 3 - \mathrm{rank}\, B = 2$ なので、例えば $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto x - 2y + z$

が求める線形写像である。

B2 (a) $\forall \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r, \sum_{i=1}^{r} c_i \vec{a_i} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix} = \vec{0}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1\\ 2 & a-2 & -4 & -2\\ 3 & 4 & a-3 & -3\\ 4 & 6 & 6 & a-4\\ 5 & 1 & 10 & -5 \end{pmatrix}$ とおくと、求める a の条件は $\mathrm{rank}\, A < 4$ である。

$A \xrightarrow[\substack{(4行)-(1行)4\\(5行)-(1行)5}]{\substack{(2行)-(1行)2\\(3行)-(1行)3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 7 & a+3 & 0\\ 0 & 10 & 14 & a\\ 0 & 6 & 20 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3列)+(1列)2\\(4列)+(1列)}]{(2列)+(1列)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 7 & a+3 & 0\\ 0 & 10 & 14 & a\\ 0 & 6 & 20 & 0 \end{pmatrix}$

これから $a = 0, -3$ をえる（詳細略）

(C3) $v=(v_1, v_2)$ について、F_A の行列表示が $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ になったとする。

$F_A(v_1)=\alpha v_1$
$F_A(v_2)=\beta v_2$ ということだが、$F_A^2=F_{A^2}=0$（写像として）なので、

$\alpha^2 v_1=\beta^2 v_2=0$。これから $\alpha=\beta=0$ だが、これより $F_A=0$（写像として）

となり、$F_A \neq 0$ に矛盾する。

$\boxed{C2}$ $f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=(-9)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ より求める表現行列は $\begin{pmatrix}1 & -9 & 0\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$

$\boxed{C1}$ $F_A\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$F_A\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}=-9\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

よって基底 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ に関する F_A の表現行列 $R_{F_A}=\begin{pmatrix}1 & -9\\ 0 & 4\end{pmatrix}$
順序

(別解) $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\left(=(v_1, v_2)\right)$ とすると、$R_{F_A}=P^{-1}AP$ なのであった。

$\therefore R_{F_A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -10\\ -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -9\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$\boxed{C4}$ 1. $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$, $f=a_0+a_1x+a_2x^2$, $g=b_0+b_1x+b_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ について

(☆☆) — $T(\lambda f+\mu g)=\lambda T(f)+\mu T(g)$ を示せばよい。

$T(\lambda f+\mu g)=T\left((\lambda a_0+\mu b_0)+(\lambda a_1+\mu b_1)x+(\lambda a_2+\mu b_2)x^2\right)$
$\quad=(\lambda a_0+\mu b_0)+(\lambda a_1+\mu b_1)(1+2x)+(\lambda a_2+\mu b_2)(1+2x)^2$

一方 $T(f)=a_0+a_1(1+2x)+a_2(1+2x)^2$
$T(g)=b_0+b_1(1+2x)+b_2(1+2x)^2$ より (☆☆) が分かる。

2. $T(1)=1$

$T(x)=1+2x$

$T(x^2)=(1+2x)^2=1+4x+4x^2$

より $R_T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ である。

(C5) 1. $^{\forall}\lambda, ^{\forall}\mu \in \mathbb{C}$

$^{\forall}X_1\, ^{\forall}X_2 \in V$ について

$$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} (\lambda X_1 + \mu X_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} (\lambda X_1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} (\mu X_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$$

2. $$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

以上より $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -4 \\ 6 & -3 & 8 & -4 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

3. $$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -4 \\ 6 & -3 & 8 & -4 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4行)-(3行)2]{(2行)-(1行)2} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3行)+(4行)]{(1行)+(2行)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1列で余因子展開すると

$$\det A = 3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3(27-24) - 2(-32+36) = 1$$