A1 $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \underbrace{\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)}_{= x-y-z+w}=0=\underbrace{\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)}_{= x-y+z-w}\right\}$ なので

(注 これは定義ではありません)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{2行}-\text{1行}]{}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\0&0&2&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{後, 1行+2行}]{\text{2行}/2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&0\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)$$

より W の基底として、$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ がとれる。

GS 直交化すると $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

と、$\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ が W の ONB の1つである。

A2 $\dim W=\mathrm{rank}\,(v_1,v_2,v_3,v_4)$ である

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\1&-1&1&2\\-2&0&1&1\\0&-2&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{3行+1行}\cdot 2]{\text{2行}-\text{1行}}\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\0&-2&3&3\\0&2&-3&-1\\0&-2&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{4行}-\text{2行}]{\text{3行+2行}}\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\0&-2&3&3\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad-(*)$$

より $\dim W=3$ が分かった。例えば $\det\square=-3-2+4+3\neq0$ より

v_2, v_3, v_4 は線形独立である。よって W の基底として v_2, v_3, v_4 がとれる。

$W^{\perp}$ の基底は **A1** と同様にして、以下より $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}$ がとれる。

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\1&-1&0&-2&0\\-2&1&1&3&0\\-1&2&1&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(4行)+(1行)}]{\substack{\text{(2行)}-\text{(1行)}\\ \text{(3行)+(1行)}\cdot 2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&-2&2&-2&0\\0&3&-3&3&0\\0&3&-1&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{4行}-\text{2行}\cdot 3]{\substack{\text{(2行)}/(-2)\\ \text{3行}-\text{2行}\cdot 3}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&0&0\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0\end{array}\right)$$

2、GS 直交化は省略します。

$\boxed{A3}$ $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が2次の実直交行列 ~~とすると~~ である必要十分条件は、

$P\cdot {}^tP=E_2$ すなわち $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である (このとき、${}^tP\cdot P=E_2$ は自動的に従う)

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ と適当な $\theta,\varphi\in\mathbb{R}$ を用いて書けるが、

$ac+bd=\cos(\varphi-\theta)=0$ となるには $\varphi-\theta=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ となることが

必要十分である。このとき $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ と (±に応じて) なっている。

$\boxed{A4}$ $2x^2+4xy-y^2=(x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に注意する。$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とすると、

$|\lambda E_2-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda-3)(\lambda+2)$

$A\vec{v}=3\vec{v}$ を解くと、$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{(2行)+(1行)\cdot 2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が W_3 の基底として

とれる。GS直交化より $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が W_3 のONBの1つである。

$A\vec{v}=-2\vec{v}$ を解くと、$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[\text{後}\ (2行)+(1行)]{(1行)/(-2)}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} -1 \\ +2 \end{pmatrix}$ が W_{-2} の基底として

とれる。GS直交化すると $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ +2 \end{pmatrix}$ が W_{-2} のONBの1つである。

以上より $P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & +2 \end{pmatrix}$ とすると ${}^tPAP=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ となる。

これは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ と座標変換すると、与えられた2次曲線は

$3X^2-2Y^2=1$ となることを導く。以上より、与えられた2次曲線は双曲線である。

(Pは回転であることに注意)

$\boxed{5}$ $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^3-2-3(\lambda-2)=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$

$t^3-3t-2=(t+1)^2(t-2)$ より

より固有値は $\lambda=1,4$.

$A\vec{v}=4\vec{v}$ を解くと，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)\Leftrightarrow(3行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3行+1行\cdot 2]{2行+1行} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2行)/3]{(3行)-(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}t \overset{\text{GS直交化}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$A\vec{v}=\vec{v}$ を解くと $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3行-1行]{2行+1行} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ より $\vec{v}=s\vec{a_1}+t\vec{a_2}$

$\vec{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{a_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{a_1},\vec{a_2} \overset{\text{GS直交化}}{\rightsquigarrow} \vec{b_1}=\vec{a_1}$ $\quad \vec{c_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{b_2}=\vec{a_2}-\frac{(\vec{a_2},\vec{b_1})}{(\vec{b_1},\vec{b_1})}\vec{b_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\therefore \vec{c_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\therefore P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1\\ -\sqrt{2} & 0 & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ とすると ${}^tPAP=\begin{pmatrix}4 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

$\boxed{A6}$ 1. $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 2\\ -1 & \lambda-2 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)^2(\lambda-1)-8-8(\lambda-2)-(\lambda-1)$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda-6)-\lambda-7$

$=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda-2\lambda^2+6\lambda+12-\lambda-7$

$=\lambda^3-5\lambda^2-\lambda+5=\lambda^2(\lambda-5)-(\lambda-5)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-5)$

$A\vec{v}=\vec{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3行+1行\cdot 2]{2行-1行} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

より $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \overset{\text{GS}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$A\vec{v}=-\vec{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(2行)+(3行)\\(1行)+(3行)\cdot 3}]{(3行)/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)+(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

より $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \overset{\text{GS}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$A\vec{v}=5\vec{v}$ を解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3行}+\text{2行}\cdot 2]{\text{1行}+\text{2行}\cdot 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right)$$ より

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}t \xrightarrow{GS} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

以上より $P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ とすると ${}^tPAP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$

$\boxed{A7}$ 1. $|\lambda E_2-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -b & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a)^2-b^2=(\lambda-a-b)(\lambda-a+b)$

よって固有値は $\lambda=a-b,\ a+b$ ($b>0$ より $a-b\neq a+b$)

$A\vec{v}=(a-b)\vec{v}$ を解くと $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t$

$A\vec{v}=(a+b)\vec{v}$ を解くと $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t$

2. 1より $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ とすると ${}^tPAP=\begin{pmatrix}a-b & 0\\ 0 & a+b\end{pmatrix}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}A^n=P\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}a-b & 0\\ 0 & a+b\end{pmatrix}{}^tP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}A^n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\boxed{A9}$ 1. $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-5\end{vmatrix} \overset{1列-2列}{=} \begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ 2-\lambda & \lambda-3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-5\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)\{(\lambda-3)(\lambda-5)-1-1-(\lambda-5)\}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)$

$A\vec{v}=2\vec{v}$ を解く $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3行}-\text{1行}]{\text{2行}-\text{1行}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}t$

$\xrightarrow[\text{第1成分非負}]{\text{正規化}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$A\vec{v}=3\vec{v}$ を解く $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2行-3行} \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$

$\xrightarrow[\text{第1成分非負}]{\text{正規化}} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\vec{v}=0\vec{v}$ を解く $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2行-3行]{1行+3行\times 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \xrightarrow{\text{正規化}} \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\det A \neq 0$ に注意する

$Ax=0 \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ x}}{A^{-1}(Ax)} = A^{-1}0 = 0$ より示された（対偶）

$\boxed{A8}$ 1. $v=Bu$ とおくと ${}^t u A u = {}^t u\, {}^t B B u = {}^t v v \geqq 0$

等号成立は $v=0$ のときだが，Bは可逆なので $u=B^{-1}v=0$ に限られる。

2. Aは正値なので Aの固有値は全て正である（注 これは定理です）ことに注意する。これらを $\alpha_1,\cdots,\alpha_n>0$ とすると，$\exists P$：実直交 s.t. ${}^t PAP = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

となるが，$B = P\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}{}^t P$ととれることのcheckはやさしい。

$\boxed{A10}$ $Q = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に注意する。（以下，$A=\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ とおく）

ラグランジュの未定乗数法より 極値では λを未定乗数として，

$\mathrm{grad}\, Q = \lambda \cdot \mathrm{grad}(x^2+y^2+z^2-1)$ が成立する。書き下すと

$$\boxed{\begin{aligned} 2ax+2gz+2hy &= 2x\lambda \\ 2by+2fz+2hx &= 2y\lambda \\ 2cz+2fy+2gx &= 2z\lambda \end{aligned}} \iff (A-\lambda E_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

今 $x^2+y^2+z^2=1$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ なので，$|A-\lambda E_3| = 0$ でなければならない。

$\square$ のとき $Q=\lambda$ となることは容易にcheckできる。

$\boxed{A9.3}$ $\lambda_1=6,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=2,\ e_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ だった。

x_nは $A^n x_0 = 6^n a_1 e_1 + 3^n a_2 e_2 + 2^n a_3 e_3$ に正規化を施したものと同じである。

よって

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{6^{2n}a_1^2 + 3^{2n}a_2 + 2^{2n}a_3}}\left(6^n a_1 e_1 + 3^n a_2 e_2 + 2^n a_3 e_3\right)$$

$\boxed{A9.4}$ $a_1 \neq 0$ より $n\to\infty$ とすると $x_n \to e_1$ となる

$\boxed{A6.2}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ と変数変換すると $\left(\text{注 } P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\right.$ について

$\left. {}^tPAP = \begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 5\end{pmatrix} \text{ だった}\right)$

$f(x,y,z) = X^2 - Y^2 + 5Z^2$

Pは直交変換だから $x^2+y^2+z^2 = X^2+Y^2+Z^2$ でもある

つまり $\dfrac{f(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{X^2-Y^2+5Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}$ これから $\sup = 5$, $\inf = -1$ が出ると思います

(多分)