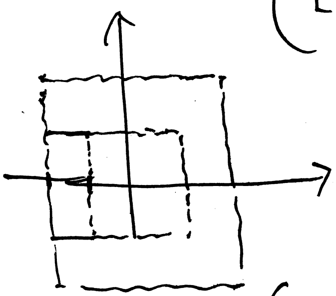
$\boxed{1.1}$



$$\left([-2,2]\times[-2,2]\right)\setminus\left([-1,1]\times[-1,1]\right)$$

$$\| $$

$$\left([-2,2]\times(1,2]\right)\sqcup\left([-2,2]\times[-2,-1)\right)\sqcup\left([-2,-1)\times[-1,1]\right)\sqcup\left((1,2]\times[-1,1]\right)$$

（注 他にもいろいろ有ります）

$\boxed{1.2}$

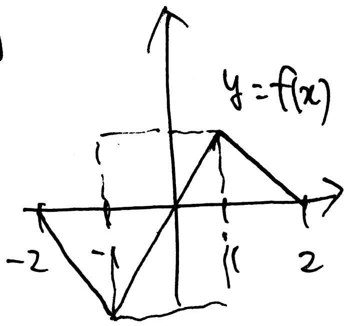
(1) m^n

(2) $m(m-1)\cdots(m-n+1) = {}_mP_n$

(3) $m\neq n$ なら 0コ

$m=n$ なら $m!$コ

$\boxed{1.3}$



(1) $a\leqq -1$ かつ $b\geqq 1$

(2) $b\leqq -1$

または

$a\geqq 1$

または

「$-1\leqq a$ かつ $b\leqq 1$」

注 問題文で $a\leqq b$ が仮定されています。

$\boxed{2.1}$ (1) $\forall x<s\ \exists y<t$ s.t. $x<y \iff s \leq t$

(2) $\exists y<t\ \forall x<s$ ~~s.t.~~ $x<y \iff s<t$

(1)について

$\boxed{\Leftarrow}$ $x<s$ について $y=\frac{x+s}{2}$ とすると，$x<y<s\leq t$ となる

$\boxed{\Rightarrow}$ 対偶を言えばよい。i.e. $s>t$ のとき $\exists x<s\ \forall y<t\ x\geq y$

を言えばよいが，$x=\frac{s+t}{2}$ とするとたしかにそうなっている。

(2)について

$\boxed{\Leftarrow}$ $y=\frac{s+t}{2}$ とすればよい。

$\boxed{\Rightarrow}$ 対偶を言えばよい。i.e. $s\geq t \Rightarrow \forall y<t\ \exists x<s\ x\geq y$ を言う。

実際 $y<t$ について $x=y$ とすると，$y\leq x<s$ となっている。

$\boxed{2.2}$

(1) $1\in(0,1]$ かつ $\forall x\in(0,1],\ x\leq 1$ だから

(2) $x\in(0,1]$ が最小元と仮定すると，$\frac{x}{2}\in(0,1]$ かつ $\frac{x}{2}<x$

より矛盾が生じる

(3) $\forall x\in(0,1],\ 0\leq x$ である。

(4) $\forall \varepsilon>0\ \exists x\in(0,1],\ \varepsilon>x$ を示せばよいが、$x=\varepsilon/2$ とすればよい。

(3)より

$\boxed{2.3}$

(a) $\exists N_1 \in \mathbb{N}\ {}^\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow a_n \in A$

(b) $\exists N_2 \in \mathbb{N}\ {}^\forall n \in \mathbb{N},\ n > N_2 \Rightarrow a_n \in A$

(a)⇒(b) 明らかである。

実際、$N_2 = N_1$ とすればよい。

(b)⇒(a) $N_1 = N_2 + 1$ とすればよい。

$\boxed{2.5}$ (1) $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ とすると、

${}^\forall a \in A,\ a \leq 1$ だから

${}^\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A,\ 1 - \varepsilon < a$ を示せばよい。

今、自然数Nを $\varepsilon > \frac{1}{N}$ととるとき、$1 - \frac{1}{N} \in A$ だが、$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{N}$ となっている。

(2) ${}^\forall x \in E,\ x \leq 0$ は明らか。

$\sup E = 0$ を言うには、${}^\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in E$ s.t. $-\varepsilon < x$ を言えばよい。

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) > -\frac{\sqrt{n}}{2n} = -\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

に注意する(ここで $x > 0$ なら $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ を用いた)

$\varepsilon > \frac{1}{2\sqrt{N}}$ なる自然数 N について $x = \sqrt{N} - \sqrt{N+1} \in E$ とすると、

望みどおりになっている。

$\boxed{2.4.}$ $f(x) = 3\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \dfrac{8}{e^x + e^{-x}}$

$$= \frac{3e^x + 8 - 3e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3t + 8 - 3\frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{3t^2 + 8t - 3}{t^2 + 1}$$

ここで $x \in \mathbb{R}$ を動くとき、$t = e^x$ は $(0, \infty) = \mathbb{R}_{>0}$ を動く。

$$f'(t) = \frac{(6t+8)(t^2+1) - (3t^2+8t-3)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{(6t^3 + 8t^2 + 6t + 8) - (6t^3 + 16t^2 - 6t)}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{-8t^2 + 12t + 8}{(t^2+1)^2}$$

$f'(t) = 0$ を求めると $2t^2 - 3t - 2 = 0$ を解いて $t = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4}$

$= 2, -\frac{1}{2}$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f(t)$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	3

これから $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5 \left(= \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) \right)$

$\displaystyle\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -3$ 　　が分かる。