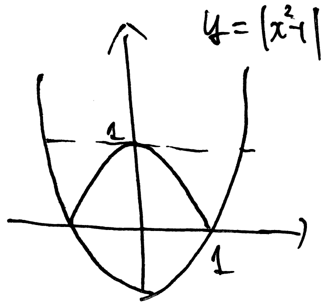
3A (1) $\sqrt{2}-1$ (2) $\sqrt{\frac{5}{4}}-1=\frac{\sqrt{5}}{2}-1$ (3) $\sqrt{1+\varepsilon}-1=\frac{1}{10}$

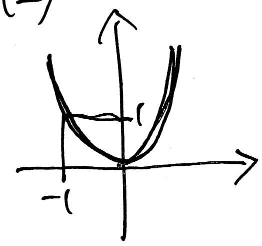


(4) $\sqrt{1+\varepsilon}-1=\frac{1}{100}$

3B (1) $\varepsilon>0$ について $\delta=\varepsilon$ とすると

$\forall x\in\mathbb{R}\left(0<|x-2|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(2)|<\varepsilon\right)$ が成立する。

(2)



$\varepsilon\geq 1$ であれば $\delta=10^{-120}$ とすると

$\forall x\in\mathbb{R}\left(0<|x-0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|<\varepsilon\right)$ が成立する。 (*)

(注 もちろん、実際は $\delta=1$ ととれますが、重要なことではありません)

$0<\varepsilon<1$ のときは、$\delta=\varepsilon$ とすると $|x|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|=|x|^2<\varepsilon^2<\varepsilon$

なので、(*) が成立する。

(注 もちろん 実際は $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ ととれますが、重要なことではありません)

(3) $\varepsilon\geq 1$ であれば $\delta=10^{-722}$ とすると

$\forall x\in\mathbb{R}\left(0<|x+1|<\delta\Rightarrow|x^2-1|<\varepsilon\right)$ が成立する (注 おまかせします)

(◇)

$0<\varepsilon<1$ のとき、$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ とすると、

$0<|x+1|<\delta$ のとき $|x^2-1|=|x+1|\cdot|x-1|<\delta\cdot 3=\varepsilon$

より (◇) が成立する。(注 もちろん評価は best possible ではありませんが、それは重要ではないです)

ここで $|x-1|<3$ はあたりまえだが、気になる人は

三角不等式 $|x-1|=|x+1+(-2)|\leq|x+1|+2<\frac{\varepsilon}{3}+2<\frac{1}{3}+2<3$

とすればよいでしょう。

3C $\lim_{x\to a} f(x)=b$ とは「$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=N(\varepsilon)>0$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}$,

$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$」なのだった。

(P とする)

(1) 同値である。

命題Qを「$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=N_1(\varepsilon)>0$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}$, $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon/2$」

とする。

P ⇒ Q の証明　$N_1(\varepsilon)=N(\varepsilon/2)$ とすればよい。

Q ⇒ P の証明　$N(\varepsilon)=N_1(2\varepsilon)$ とすればよい。

(2) 同値である。

命題Rを「$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=N_2(\varepsilon)$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}$, $0<|x-a|<\frac{\delta}{2} \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$」

とする。

P ⇒ R の証明　$N_2(\varepsilon)=N(\varepsilon)$ とすればよい。(注 $N_2(\varepsilon)=2N(\varepsilon)$ でもよいです)

R ⇒ P の証明　$N(\varepsilon)=N_2(\varepsilon)/2$ とすればよい。

3D (1) $$\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$$

で $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$ より 求める極限は $\frac{1}{2}$

(2) $x=e^t$ とすると, $\frac{x-1}{\log x}=\frac{e^t-1}{t}$　$x\to 1$ のとき $t\to 0$ なので

求める極限は 1

(3) $x=y^2$ とすると (i.e. $y=\sqrt{x}$) $x\to 0+0$ のとき $y\to 0+0$ である。

$\sqrt{x}\log x = 2y\log y$ なので、求める極限は 0

(4) $x^x = e^{x\log x}$ より 求める極限は $e^0=1$

$\boxed{3E}$ (1) $f(x)=x^3-3x+3$ とすると $f(0)=3>0$ $f(-10^{121})<0$

なので中間値の定理より $-10^{121}<x_0<3$ なる実数解 x_0 が存在する。

(2) 存在しない

$x\leq 1$ ならば $x^4-4x+4 = x^4+(4-4x)>0$ であり

$x\geq 1$ のとき $x=1+t$ $(t\geq 0)$ とすると

$x^4-4x+4=((1+t)^4-4t = 1+6t^2+4t^3+t^4\geq 1$ である。

(3) $f(x)=e^x-x$ について $f'(x)=e^x-1$ は $x\geq 0$ のとき $f'(x)\geq 0$

なので $f(x)$ は単調増加。$f(0)=1$ より $\forall x\geq 0$, $f(x)\geq 1$ である。

$x<0$ であれば、$e^x>0$, $-x>0$ より $f(x)>0$ である。

よって $e^x=x$ なる実数 x は存在しない。

(4) $f(x)=\cos x - x$ とする。f は連続で、$f(0)=1$, $f(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}$

より $0<\overset{\exists}{x_0}<\frac{\pi}{2}$, $\cos x_0 = x_0$ である。

$\boxed{3F}$ (1) I は閉区間で、f は連続なので、存在する。

(2) 存在しない。

実際 $\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ で $f(x_0)$ が最大になったとすると、

$f(\frac{x_0+\frac{\pi}{2}}{2})>f(x_0)$ なので矛盾が生じる。

(3) について

$0<r<1$ の場合を示せば十分である。

$\frac{1}{r}=1+\alpha \quad (0<\alpha)$ とする。$n\geqq 2$ ならば $(1+\alpha)^n \geqq 1+\alpha n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

なので $r^n \leqq \dfrac{1}{1+\alpha n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2}$

よって $a_n=n\cdot r^n \leqq \dfrac{1}{\frac{n-1}{2}\alpha^2+\alpha+\frac{1}{n}}$ だが、右辺の分母は $n\to\infty$ のとき

いくらでも大きくなるからである。(注 これを ε-N 論法で書き直すのは おまかせします)

(4) について ~~$c=\frac{R^{2R}}{2n!}$ とすると、~~

$c>|R|$ なる $c\in\mathbb{N}$ を1つえらんで固定する。

$n>2c$ であれば $|a_n|=\dfrac{R^{2c}}{(2c)!}\prod_{k=2c+1}^{n}\left|\dfrac{R}{k}\right| < \dfrac{R^{2c}}{(2c)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2c}$

$\frac{R^{2c}}{(2c)!}$ は定数で、$n\to\infty$ ならば $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2c}\to 0$ なので、$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ が分かる。

(5) について $n=\frac{1}{x}$ とすると、$a_n=-x\log x$ である。

$n\to\infty$ のとき $x\to 0+0$ なので $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{x\to+0}(-x\log x)=0$

(3) (1)と同じ理由で存在する。

(4) $f(x)$ の ~~[illegible]~~ $I=(0,\pi)$ における最大値が存在することと、

$f(x)$ の $J=[0,\pi]$ における最大値が存在することは同値である。

(これは $\{f(x) \mid x\in I\}\cup\{0\}=\{f(x) \mid x\in J\}$

で $\{f(x) \mid x\in I\}$ は少なくとも1つ正の実数をふくむからである。)

よって(3)より存在する。

$\boxed{3G}$ (1) 0

(2) 0

(3) 0

(4) 0

(5) 0

<u>(1), (2)について</u>

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ はみとめる。i.e. $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N_1(\varepsilon)\ \forall n>N,\ \left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$

このとき $\forall n>N_1(\varepsilon),\ \left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon^2<\varepsilon$ (ただし $0<\varepsilon<1$ とした) となる

又 $\forall n>\cancel{N_1(\varepsilon)}\ N_1(\varepsilon^2)$ $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|<\varepsilon$ となる。