3.1. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\mathbb{R},\ 0<x<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}|<\varepsilon$

を言えばよいから

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\mathbb{R},\ 0<x<\delta \Rightarrow x<\varepsilon^2$$

を言えばよい。これは $\delta=\varepsilon^2$ ととると達せられる。

3.2. $\lim_{x\to 0} f(x)=A$ とは $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in\mathbb{R}\ 0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

なのだった。よって $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ について $\lim_{x\to 0} f(x)$ が存在しないことを言うには、

$$\forall A\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}\ \ 0<|x|<\delta \text{ かつ } |f(x)-A|\geq\varepsilon \quad (*)$$

を言えばよい。

実際、任意のAと $\varepsilon=\frac{1}{2}$ について、どう $\delta>0$ をとっても $x_1, x_2\in\mathbb{R}_{>0}$ を

$0<\cancel{|x_1|, |x_2|}\ x_1, x_2<\delta$ かつ $\frac{1}{x_1}\in\{2\pi n\mid n\in\mathbb{N}\}$, $\frac{1}{x_2}\in\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ととることができる。

最後に、

$|f(x_1)-A|<\varepsilon$

$|f(x_2)-A|<\varepsilon$

となることはないことを示そう

実際、そうだとすると $|f(x_1)-f(x_2)| \underset{\text{三角不等式}}{\leq} |f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<1$

だがいま $|f(x_1)-f(x_2)|=1$ なので矛盾が生じる。

よって $x=x_1$ 又は $x=x_2$ について $|f(x)-A|\geq\varepsilon$ (かつ $0<|x|<\delta$) となっている。

$\boxed{3.3}$ 右極限が存在する、とは

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_1(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_2(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < x-a < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$

ということである。ただし $A = \lim_{x \to a+0} f(x)$, $B = \lim_{x \to a+0} g(x)$ とおいた。

$A \leqq B$ を言うために $A > B$ と仮定して矛盾を導く。

$\varepsilon = \dfrac{A-B}{3} > 0$ について $\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}\ (>0)$ とすると

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < x-a < \delta,\ |f(x) - A| < \varepsilon$ かつ $|g(x) - B| < \varepsilon$ である。

今、$x_0 \in \mathbb{R}$ を $0 < x_0 - a < \delta$ となるように1つとる。

$f(x_0) > A - \varepsilon$

$g(x_0) < B + \varepsilon$ だが $B + \varepsilon < A - \varepsilon$ なので $f(x_0) > g(x_0)$

が得られる。これは $a < x \Rightarrow f(x) \leqq g(x)$ という仮定に反する。

$\boxed{3.4.}$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0$ より $\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0$ である。

一方、$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{1+x^2}}$ は固定された $x \neq 0$ について

$N\to\infty$ とすると $x^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2$ に収束する。

よって $\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \lim_{x\to 0}(1+x^2) = 1$

$\boxed{3.5.}$ $g(x) = f(x) - x : [0,1] \to \mathbb{R}$ とおくと、

$g(0) > 0$, $g(1) < 0$ が $f(0), f(1) \in (0,1)$ から従う。

また x と f が連続なので g も連続。よって中間値の定理から

$\exists x_0 \in [0,1]$ s.t. $g(x_0) = 0$　これは $f(x_0) = x_0$ ということである。

(ここで $x_0 \neq 0, 1$ は明らか)