$\boxed{4A}$ (1) $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

(2) $f'(0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$ （これは25ページ例1で扱った）

$\boxed{4B}$ (1) $(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$ $(n\geqq 1のとき)$ (2) $\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(3)
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0,1,2}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)}$$

$$= \frac{n!\,x^2}{(1-x)^{n+1}} + \frac{n\cdot(n-1)!\,2x}{(1-x)^{n}} + \frac{2(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}\frac{n(n-1)}{2}\cancel{\frac{n!\,x(2-x)}{(1-x)^{n+1}}} + 2(n-2)$$

$$= \frac{n!\left(x^2+2x(1-x)+(1-x)^2\right)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (n\geqq 2のとき)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

(4) $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}(e^x)^{(n-k)} = xe^x + n\cdot e^x = (x+n)e^x$

$\boxed{4C}$ (1) $n=\infty$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^3 & (x\geqq 0)\\ -x^3 & (x\leqq 0)\end{cases}$ より $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & (x\geqq 0)\\ -3x^2 & (x\leqq 0)\end{cases}$ $f''(x)=\begin{cases} 6x & (x\geqq 0)\\ -6x & (x\leqq 0)\end{cases}$

が分かる。$f''(x)$は連続だが、$x=0$で微分不可能なので $n=2$

(3) $n=\infty$

(4) $n=\infty$

4E (1) $x\log x - x + C$

(2) $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$ より $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

(3) $\dfrac{x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}\right)$ より $\displaystyle\int \frac{x}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{1-x^2}\right|$

(4) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とすると $dt = \dfrac{dx}{2}\cdot(1+t^2)$ で $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ である。よって

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2}dt = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$$

4D (1) $-\log|\cos x|$

(2) $u = \log x$ とおくと、$du = \dfrac{dx}{x}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx = \int u\,du = \frac{\log^2 x}{2}$

(3) (2) と同様に $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log|\log x|$

(4) $u = 1+\sin^2 x$ とおくと、$du = 2\sin x\cos x\,dx$ $\therefore$ $\sin x\cos x\,dx = \dfrac{du}{2}$

よって $\displaystyle\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\log|u| = \frac{1}{2}\log(1+\sin^2 x)$ ($\because$ $1+\sin^2 x > 0$)

4F (1) $\forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}$ s.t. $|x|<\delta$ かつ $\sin\dfrac{1}{x} < 0$ となるので

とくに $y=f(x)$ は原点で局所的に最小にならないし，極小にもならない。

(2) $\sin\dfrac{1}{x} \geqq -1$ より $x\neq 0$ なら $f(x) = x^2\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right) \geqq 0$ である。

よって $y=f(x)$ は原点で局所的に最小になる。

$\forall\delta>0\ \exists x\in\mathbb{R}$ s.t. $|x|<\delta$ かつ $\sin\dfrac{1}{x} = -1$ となるので、$y=f(x)$ は原点で極小にならない。

(3) $x\neq 0$ なら $f(x) = x^2 + x^2\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right) \geqq x^2 > 0$ より。

$y=f(x)$ は原点で局所的に最小になるし，極小にもなる。