$\boxed{8.1.}$ (1)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & ps \\ q & qs+r \end{pmatrix}$$ なので、

$a = p$
$b = ps$
$c = q$
$d = qs+r$

という連立方程式が任意の a,b,c,d s.t. $a \neq 0$ について
ただ1組の解 (p,q,r,s) をもつことを示せばよい。
実際 $p=a$, $q=c$, $s=\dfrac{b}{a}$, $r = d-\dfrac{bc}{a}$ となる。

(別解) $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix}$ と同値である。この左辺は $\begin{pmatrix} a & b-as \\ c & d-cs \end{pmatrix}$

なので $p=a$, $q=c$, $s=\dfrac{b}{a}$, $r=d-\dfrac{bc}{a}$ が求まる。

(2) $ad-bc \neq 0$ より $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に注意する。$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ なる $p>0$, $\theta \in [0, 2\pi)$
がただ1つ存在することは明らかである ($p=\sqrt{a^2+c^2}$, θ は $a+c\sqrt{-1}$ の偏角となる)。

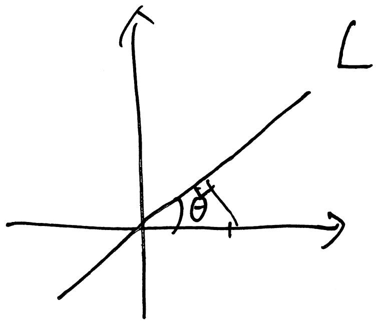
次に $q\cos\theta - r\sin\theta = b$
$q\sin\theta + r\cos\theta = d$ なる (q,r) の一意性を言えばよいが、

これは $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ と同値で、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

なので $\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ +\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とただ1つ求まる。

(注) ここは $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が可逆であることを言えばよく、逆行列の具体形は必要ありません。

8.2.



$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の行き先は

それぞれ, $\vec{f_1} = \cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

なので $F = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$ となる。