$\boxed{12A}$ (1) 2×3 (2) 3 (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{12B}$ (1) $\begin{pmatrix} x+y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} x+y+2z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$

$\boxed{12C}$ (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$

$\boxed{12D}$ (1) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{12E}$ (1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{12F}$ (1) $A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E_2$ より $A^3=-A$, $A^4=E_2$ である。

よって
$$A^n=\begin{cases}E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 0 \pmod 4\\ A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 1 \pmod 4\\ -E_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 2 \pmod 4\\ -A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

(2) $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\underset{E_3}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}}$

よって
$$A^n=\begin{cases}E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 0 \pmod 3\\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 1 \pmod 3\\ A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \text{if } n\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

(3)
$$A^2=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-3\\-3&6&-3\\-3&-3&6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=3A$$

よって $A^n=3^{n-1}A=3^{n-1}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\left(=\begin{pmatrix}2\cdot 3^{n-1}&-3^{n-1}&-3^{n-1}\\-3^{n-1}&2\cdot3^{n-1}&-3^{n-1}\\-3^{n-1}&-3^{n-1}&2\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}\right)$ if $n\geq 1$

注 $A^0=E_3$

(4)

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4E_4$$ より

$$A^n=\begin{cases}4^{\frac{n}{2}}E_4=2^nE_4 & \text{if } n\equiv 0 \pmod 2\\ 4^{\frac{n-1}{2}}A=2^{n-1}A & \text{if } n\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$$

$\boxed{12G}$ Aを$n\times n$の正方行列とする。

Aの第j列をa_jとすると、$A=(a_1,\cdots,a_n)$となっている（a_jはn次元列ベクトルである）。

$$A^2=A(a_1,\cdots,a_n)=(Aa_1,\cdots,Aa_n)$$

$\lambda A=(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)$ より $\forall j=1,\cdots,n,\ Aa_j=\lambda a_j$ である。

今、$A\neq O$ より $\exists i=1,\cdots,n,\ a_i\neq 0$ なので、求めるvとして このa_iを取ればよい。