14A

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○がpivotなので、被約階段行列

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ○がpivotなので、階段行列だが、被約ではない

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ○がpivotなので、被約階段行列

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○がpivotなので、被約階段行列

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ○がpivotなので、階段行列だが、被約ではない

(6) 階段行列でない

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○がpivotなので、階段行列だが、被約ではない

(8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○がpivotなので、階段行列だが、被約ではない

(9) 階段行列でない

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ○がpivotなので、被約階段行列

14B

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2行)-(1行)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1行)-(2行)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 以下、○がpivot

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2行)-(1行)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1行)-(2行)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2行)-(1行)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2行)-(1行)\times 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1行)-(2行)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2行)-(1行)\times 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2行)-(1行) \\ (3行)-(1行)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1行)-(2行) \\ (3行)-(2行)\times 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2行)-(1行)\times 2 \\ (3行)-(1行)\times 2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1行)-(3行)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2行)\leftrightarrow(3行)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2行)-(1行)\times 2 \\ (3行)-(1行)\times 3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2行)-(1行) \\ (3行)-(1行)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1行)-(3行)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2行)\leftrightarrow(3行)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2行)-(3行)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3行)-(1行)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1行)-(2行) \\ (3行)-(2行)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14C (1) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)-(1行)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)-(2行)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\therefore x=-1,\ y=2$

(2) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)-(1行)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ∴ 解なし

(3) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)-(1行)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore \begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \end{cases}$ (tはパラメータ)

(4) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(2行)-(1行) \\ (3行)-(1行)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)\leftrightarrow(3行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)-(2行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2行)-(3行)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\therefore x=y=z=1$

14D

(1) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(1行)}\times 2]{\text{(2行)}-\text{(1行)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ 解なし

(2) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(1行)}\times 2]{\text{(2行)}-\text{(1行)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(2行)}]{\text{(1行)}-\text{(2行)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore x=3,\ y=-1$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(1行)}\times 2]{\text{(2行)}-\text{(1行)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(2行)}]{\text{(1行)}-\text{(2行)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\therefore z=-1$

$y=t$ (tはパラメータ)

$x=3-t$

(4) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(1行)}\times 2]{\text{(2行)}-\text{(1行)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3行)}-\text{(2行)}]{\text{(1行)}-\text{(2行)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\therefore x_4=t$

$x_3=-1-2t$

$x_2=s$

$x_1=3+t-s$

(s, tはパラメータ)

14E

(1) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(2行)}-\text{(1行)}\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(1行)}-\text{(2行)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(1行)}\leftrightarrow\text{(2行)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(1行)}-\text{(2行)}\times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(1行)}\leftrightarrow\text{(2行)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(2行)}-\text{(1行)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\downarrow$ (2行)×(−1)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(1行)}-\text{(2行)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(3行)}\times\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

$\downarrow$ (2行)−(3行)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$ $\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(4)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&1&1&1&0&0\\ 2&1&2&0&1&0\\ 2&3&1&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)-(1行)]{(2行)-(1行)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&-1&1&0\\ 0&2&0&-1&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1行)-(2行)-(3行)\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\ 0&0&1&-1&1&0\\ 0&2&0&-1&0&1 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ (2行)$\leftrightarrow$(3行) 後 (1行)と(2行)を$\times\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{5}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\ 0&1&0&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&1&-1&1&0 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{5}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ -1&1&0 \end{pmatrix}$$

(5)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&2&1&0&0&0\\ 1&2&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&2&1&0&0&1&0\\ 0&0&3&2&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[(4行)-(3行)]{(2行)-(1行)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&2&1&0&0&0\\ 0&1&0&-1&-1&1&0&0\\ 0&0&2&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&-1&1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3行)\Leftrightarrow(4行)]{(1行)-(2行)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&3&2&-1&0&0\\ 0&1&0&-1&-1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&-1&1\\ 0&0&2&1&0&0&1&0 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ (1行)$-$(3行), (4行)$-$(3行)$\times 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&2&2&-1&1&-1\\ 0&1&0&-1&-1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&-1&1\\ 0&0&0&-1&0&0&3&-2 \end{array}\right)$$

(1行)+(4行)×2, (2行)−(4行), (3行)+(4行), 後(4行)×(−1)

$$\longleftarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&7&-5\\ 0&1&0&0&-1&1&-3&+2\\ 0&0&1&0&0&0&2&-1\\ 0&0&0&1&0&0&-3&+2 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 2&-1&7&-5\\ -1&1&3&-2\\ 0&0&2&-1\\ 0&0&-3&+2 \end{pmatrix}$$

14F

(1) 得られる

$$\begin{pmatrix} 2A_1\\ A_2+A_1\\ A_3-A_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 1&1&0\\ -1&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 1&1&0\\ -1&0&1 \end{pmatrix}=2$ より これは可逆。

よって $\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 1&1&0\\ -1&0&1 \end{pmatrix}$ は基本行列の積でかける。

(2) 得られる

$$\begin{pmatrix} 2A_1\\ A_2+A_1\\ A_3+A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 1&1&0\\ 0&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 1&1&0\\ 0&1&1 \end{pmatrix}=2\neq 0$ より (1)と同様の理由による。

(3)
$$\begin{pmatrix} A_1\\ A_2-A_3\\ A_3+A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&-1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&-1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}=2\neq 0$ より 得られる。

(4)
$$\begin{pmatrix} A_1-A_2\\ A_2-A_3\\ A_1-A_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&-1&0\\ 0&1&-1\\ 1&0&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 1&-1&0\\ 0&1&-1\\ 1&0&-1 \end{pmatrix}=0$ より 一般には得られない。

（注 A_1, A_2, A_3 が 例えば $(0,0,0)$ だと得られます）