$\boxed{4.1}$

(1) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 + h \sin \dfrac{\pi}{2h} = 1$

(2) $x \neq 0$ のとき $f'(x) = 1 + 2x \sin \dfrac{\pi}{2x} + x^2 \cos \dfrac{\pi}{2x} \cdot \left(-\dfrac{\pi}{2x^2}\right)$

$$= 1 + 2x \sin \frac{\pi}{2x} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2x}$$

$\lim_{x \to 0} 2x \sin \dfrac{\pi}{2x} = 0$ だが $\lim_{x \to 0} \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi}{2x}$ は存在しないので

$\lim_{x \to 0} f'(x)$ は存在しない。よって当然 $\lim_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$ であり、

$f'(x)$ は原点で連続でない。

(3) $f(b_n) - f(a_n) = \left(\dfrac{1}{4n+1} + \left(\dfrac{1}{4n+1}\right)^2 \sin \dfrac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{4n+1}} \right) - \left(\dfrac{1}{4n-1} + \left(\dfrac{1}{4n-1}\right)^2 \sin \dfrac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{4n-1}} \right)$

$$= \left(\frac{1}{4n+1} + \left(\frac{1}{4n+1}\right)^2 \right) - \left(\frac{1}{4n-1} - \left(\frac{1}{4n-1}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{(4n-1)^2 + (4n+1)^2 - 2(4n+1)(4n-1)}{(4n+1)^2 (4n-1)^2}$$

$$= \left(\frac{(4n+1) - (4n-1)}{(4n+1)(4n-1)} \right)^2 = \frac{4}{(16n^2-1)^2}$$

(4) $\forall \delta > 0 \ \exists x_1 \in \mathbb{R} \ \exists x_2 \in \mathbb{R}$ s.t. $-\delta < x_1 < x_2 < \delta$ かつ $f(x_1) > f(x_2)$ ―(◇)

を言えばよい。今、$-\delta < b_n < a_n < \delta$ となるように n をえらぶと

(3) より $f(b_n) - f(a_n) > 0$ だから、$x_1 = b_n$, $x_2 = a_n$ とすれば (◇) が

成立することが分かる。

$\boxed{4.2}$

(1) $\dfrac{\cos x-1}{x}=\dfrac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=-\dfrac{\sin^2 x}{x(\cos x+1)}=-\sin x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x+1}$

より $x\to 0$ とすると $-0\cdot 1\cdot\dfrac{1}{1+1}=0$ に収束する。

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x$$

(3) (2)より $\sin x$ は $\forall x\in\mathbb{R}$ で微分可能なので、$\forall x\in\mathbb{R}$ で連続である。

4.3. $P(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$ とおく。

(今、fは0でないm次多項式とした)

又は0

P(x)は高々m次の多項式で、$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m)}(a) = 0$

は容易にcheckできる。よって P(x) は $(x-a)^{m+1}$ で割り切れるが、

〜〜より $P=0$ でなければならない。

4.4. (1) $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ より

$$\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{x-4}{x-3}\,dx - \int \frac{x-4}{x-2}\,dx$$

$$= x - \log|x-3| - x + 2\log|x-2| + C$$

$$= \log\left|\frac{(x-2)^2}{x-3}\right| + C$$

(2) $\frac{x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$ より

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,dx = -2\cdot\frac{1}{x-1} + \log|x-1| + C$$

(3) $\frac{x}{x^2+2x+5} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{-1}{(x+1)^2+2^2}$ より

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) - 1\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2} + C$$